[東京大学 2022 年前期 理科 $\boxed{3}$]

Oを原点とする座標平面上で考える。座標平面上の2点$\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$に対し，点Sが点Tから十分離れているとは，

$$|x_1-x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1-y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域をDとし，その2つの頂点$\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 3)$を考える。さらに，次の条件(ｉ)(ⅱ)をともに満たす点Pをとる。

(ｉ) 点Pは領域Dの点であり，かつ，放物線$y=x^2$上にある。

(ⅱ) 点Pは，3点O, A, Bのいずれからも十分離れている。

点Pのx座標をaとする。

(1) aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件(ⅲ)，(ⅳ)をともに満たす点Qが存在しうる範囲の面積$f(a)$を求めよ。

(ⅲ) 点Qは領域Dの点である。

(ⅳ) 点Qは，4点O, A, B, Pのいずれからも十分離れている。

(3) aは(1)で求めた範囲を動くとする。(2)の$f(a)$を最小にするaの値を求めよ。