[東京大学 2022 年前期 理科 $\boxed{1}$]

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

[東京大学 2022 年前期 理科 $\boxed{2}$]

数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n{}^2+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 正の整数nが3の倍数のとき, a_nは5の倍数となることを示せ。

(2) $k,\ n$を正の整数とする。a_nがa_kの倍数となるための必要十分条件を$k,\ n$を用いて表せ。

(3) a_{2022}と$(a_{8091})^2$の最大公約数を求めよ。

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3,\ \ 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A(3, 0), B(3, 3) を考える。さらに，次の条件(i)(ii)をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件(iii)，(iv)をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3) a は(1)で求めた範囲を動くとする。(2)の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - x$$

を考える。

(1) 座標平面上のすべての点Pが次の条件(i)を満たすことを示せ。

(i) 点Pを通る直線ℓで，曲線Cと相異なる3点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件(ii)を満たす点Pのとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点Pを通る直線ℓで，曲線Cと相異なる3点で交わり，かつ，直線ℓと曲線Cで囲まれた2つの図形の面積が等しくなるものが存在する。

座標空間内の点 A(0, 0, 2) と B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに1回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{X}_N$ を以下の規則（ｉ），（ⅱ）に従って定める。

（ｉ） X_0 は O にある。

（ⅱ） n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・ n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は1回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・ n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。

また p_r が最大となる r の値を求めよ。