



$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を  $C$  とする。  $C$  上の点  $P(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$  を通り、点  $P$  における  $C$  の接線と垂直に交わる直線を  $l$  とする。  $C$  と  $l$  は相異なる 3 点で交わるとする。

(1)  $\alpha$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)  $C$  と  $l$  の点  $P$  以外の 2 つの交点の  $x$  座標を  $\beta, \gamma$  とする。ただし  $\beta < \gamma$  とする。

$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$  となることを示せ。

(3) (2) の  $\beta, \gamma$  を用いて、

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

とさだめる。このとき、  $u$  のとりうる値の範囲を求めよ。

