[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{1}$]

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$C: y = x^2 + ax + b$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，

他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1)　$C: y = x^2 + ax + b$　…①　と $y = -x^2$ から y を消去すると

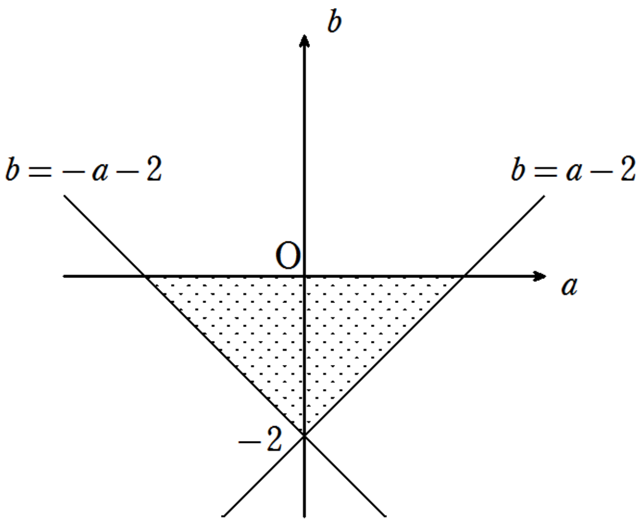
$x^2 + ax + b = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + ax + b = 0$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおくと

求める条件は　$f(-1) > 0$ かつ $f(0) < 0$ かつ $f(1) > 0$ である。

よって，$2 - a + b > 0$ かつ $b < 0$ かつ $2 + a + b > 0$ …②　となるから

これを図示すると次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



(2)　放物線Cの通りうる範囲は，①かつ②を満たす実数a, bが存在するような$(x,\ y)$の範囲である。

① ⇔ $b=-xa+y-x^2$ 　であり，これはab平面上の傾き$-x$， b切片$y-x^2$の直線を表す。

この直線と(1)で求めた領域が共有点をもつような場合を考えればよい。

$g(a)=-xa+y-x^2$ とおく。

(Ⅰ) $y-x^2 \leqq -2$　すなわち　$y \leqq x^2-2$　のとき

満たすべき条件は，　$g(-2)>0$　または　$g(2)>0$

よって　$2x+y-x^2>0$　または　$-2x+y-x^2>0$

したがって　$y>x^2-2x$　または　$y>x^2+2x$

(Ⅱ) $-2<y-x^2<0$　すなわち　$x^2-2<y<x^2$　のとき

必ず共有点をもつので，　$x^2-2<y<x^2$

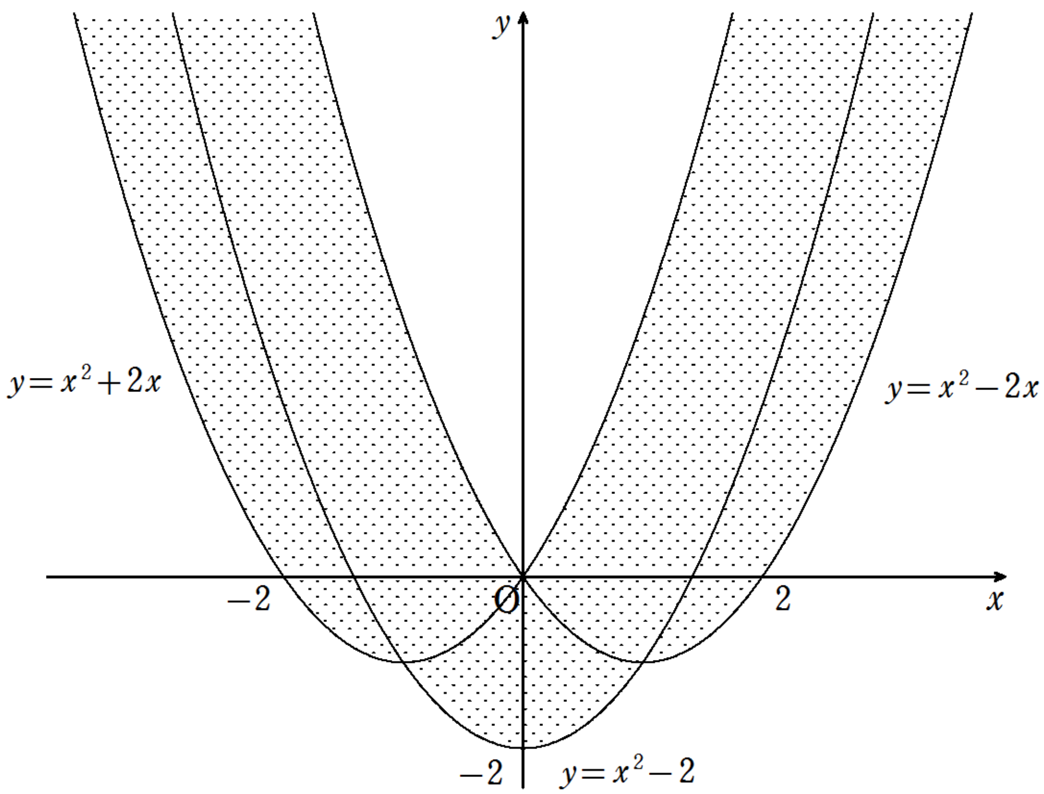
(Ⅲ) $y-x^2 \geqq 0$　すなわち　$y \geqq x^2$　のとき

満たすべき条件は，　$g(-2)<0$　または　$g(2)<0$

よって　$2x+y-x^2<0$　または　$-2x+y-x^2<0$

したがって　$y<x^2-2x$　または　$y<x^2+2x$

以上，(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)をまとめて図示すると，次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{2}$]

複素数 $a,\ b,\ c$ に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。

$f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c$ をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表せ。

(2) $f(0),\ f(1),\ f(i)$ がいずれも1以上2以下の実数であるとき，

$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(1) $f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ より

$c=\alpha$ …①，$a+b+c=\beta$ …②，$-a+bi+c=\gamma$ …③

①を②，③に代入して $a+b=\beta-\alpha$ …②´ ，$-a+bi=\gamma-\alpha$ …③´

②´＋③´より $(1+i)b=-2\alpha+\beta+\gamma$

よって $b=\dfrac{-2\alpha+\beta+\gamma}{1+i}=\dfrac{(-2\alpha+\beta+\gamma)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$

したがって $a=\beta-\alpha-b=\beta-\alpha-\left\{(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma\right\}=-i\alpha+\dfrac{1+i}{2}\beta-\dfrac{1-i}{2}\gamma$

(2) $f(2)=4a+2b+c$

$$=4\left(-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma\right)+2\left\{(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right\}+\alpha$$

$$=-\alpha+3\beta+\gamma+\left(-2\alpha+\beta+\gamma\right)i$$

$$=\left(-1-2i\right)\alpha+\left(3+i\right)\beta+\left(-1+i\right)\gamma$$

となる。

$1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$，$1\leqq\gamma\leqq2$ のもとで，点 $f(2)$ の存在範囲を調べる。

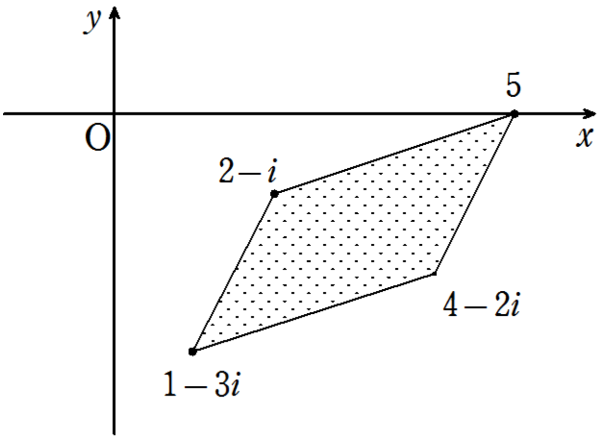
$\mathrm{A}_\alpha\left(\left(-1-2i\right)\alpha\right),\ \mathrm{B}_\beta\left(\left(3+i\right)\beta\right)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_\alpha}+\overrightarrow{\mathrm{OB}_\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと，

$\alpha,\ \beta$ が $1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$ を満たして変化するとき，

点 Q の存在範囲は $\alpha=1,\ \beta=1$ に対応する Q を C として

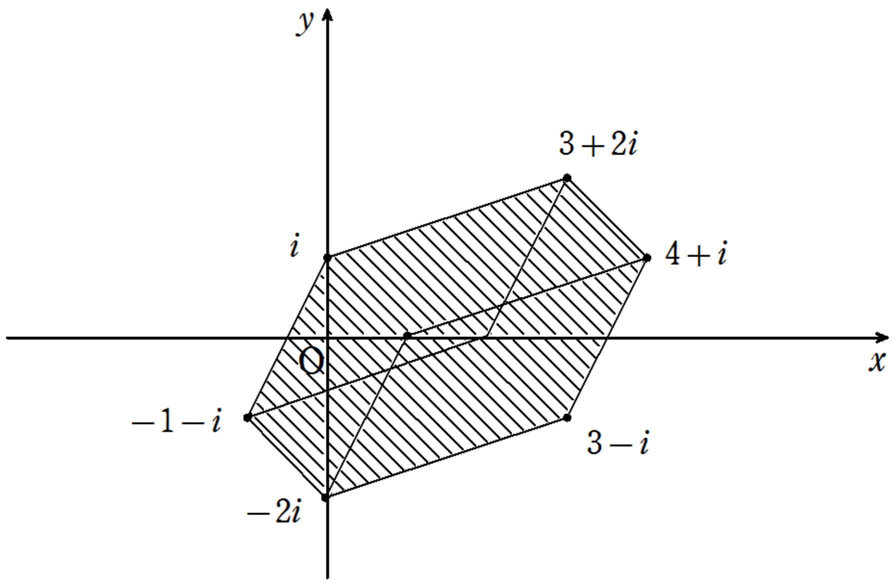
C を 1 つの頂点として 2 つのベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ の張る平行四辺形の内部および周上であり，

次の図のようになる。



$f(2)$ の存在範囲は，この平行四辺形を $(-1+i)\gamma$ （$1 \leqq \gamma \leqq 2$）だけ平行移動させたときに通過する

範囲であるから，これを図示すると，次の図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。



[東京大学 2021年前期 理科 $\boxed{3}$]

関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 $\mathrm{A}\left(1,\ f(1)\right)$ における C の接線を

$$\ell : y=g(x)$$

とする。

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ1つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\left\{f(x)-g(x)\right\}^2 dx$$

を計算せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ に対し，$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{-x^2+3}{\left(x^2+3\right)^2}$ であり，

$f'(1)=\dfrac{1}{8}$，$f(1)=\dfrac{1}{4}$ であるから，$\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ における C の接線方程式は

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

である。

このとき，
$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 8x=\left(x+1\right)\left(x^2+3\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3+x^2-5x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2(x+3)=0$$

よって　$x=1,\ -3$

したがって，C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ1つ存在し，その x 座標は -3 である。

(2)　求める定積分は

$$\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2 dx=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+3\right)^2}dx-\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx+\frac{1}{64}\int_{-3}^{1}(x+1)^2 dx$$

であり，$I=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+3\right)^2}dx$，$J=\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx$，$K=\int_{-3}^{1}(x+1)^2 dx$ とおく。

I について，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，

被積分関数について　$x^2+3=3\left(\tan^2\theta+1\right)=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$

積分変数について　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

積分区間について　$x:-3\to 1$ のとき $\theta:-\dfrac{\pi}{3}\to\dfrac{\pi}{6}$

であるから，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}3\tan^2\theta\cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta\, d\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$$

J について，

$$\frac{x(x+1)}{x^2+3}=\frac{x^2+x}{x^2+3}=\frac{x^2+3+x-3}{x^2+3}=\frac{x^2+3}{x^2+3}+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}=1+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}$$

であるから，第 3 項については置換積分して

$$J=\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{x}{x^2+3}\right)dx-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}3\cdot\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}\log\left(x^2+3\right)\right]_{-3}^{1}-\sqrt{3}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=4+\frac{1}{2}(\log 4-\log 12)-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

K について，

$$K = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-3}^{1} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

となる。

よって，求める定積分は

$$I - \frac{1}{4}J + \frac{1}{64}K = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) + \frac{1}{64}\cdot\frac{16}{3}$$

$$= \frac{5}{24}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば,

A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとする。このとき, $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$, $B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して

$KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ。

(3) $a,\ b$ は(2)の通りとし,さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。

${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは, ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

(1) 合同式の法は 4 とする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいので, $K\equiv L$

よって, $KA\equiv LA$ であり, $KA=LB$ より $LA\equiv LB$

L は奇数であり,4 と互いに素であるから $A\equiv B$ が成り立つ。

よって, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい。

(2) $$A=\frac{(4a+1)\cdot 4a\cdot(4a-1)\cdot(4a-2)\cdot\cdots\cdot(4a-4b-1)}{(4b+1)\cdot 4b\cdot(4b-1)\cdot(4b-2)\cdot\cdots\cdot 1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b-1}{1}$$

であり,これは $4b+1$ 個の分数 $\dfrac{4a-4b+k}{k}$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 4b+1$)の積である。これを

(Ⅰ) k が奇数であるもの,(Ⅱ) k が 4 で割り切れない偶数であるもの,(Ⅲ) k が 4 で割り切れるもの

に分けて考える。

(Ⅰ)について

$\dfrac{4a+1}{4b+1}\cdot\dfrac{4a-1}{4b-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4a-4b-1}{1}$ …① であるが,この分子・分母はすべて奇数であるから,

奇数 $K_1,\ L_1$ を用いて,分母の積を K_1,分子の積を L_1 とおくことができる。

(Ⅱ)について

$$\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-6}{4b-6}\cdots\cdot\frac{4a-4b+2}{2}=\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{2a-3}{2b-3}\cdots\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\quad\cdots②$$ となるが，

この分母・分子はすべて奇数であるから，

奇数 $K_2,\ L_2$ を用いて，分母の積を K_2，分子の積を L_2 とおくことができる。

(Ⅲ)について

$$\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}={}_a\mathrm{C}_b=B$$

となる。

よって， $K=K_1K_2,\ L=L_1L_2$ とすれば， $K,\ L$ は正の奇数であり，

$A=\dfrac{L}{K}B$ となることから，題意は成り立つ。

(3)　$A,\ B,\ K,\ L$ を(2)のように定義する。$a-b$ が 2 の倍数であることから，

①と②について分母と分子の差は必ず 4 の倍数になる。

したがって，①と②の積について，分母 K と分子 L はそれぞれ 4 で割った余りが等しい奇数である。

よって，(1)より $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは， $B={}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)　合同式の法は 4 とする。

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37}={}_{4\cdot505+1}\mathrm{C}_{4\cdot9+1}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9={}_{4\cdot126+1}\mathrm{C}_{4\cdot2+1}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2=\frac{126\cdot125}{2\cdot1}=63\cdot125\equiv3\cdot1=3$$

となることから，求める余りは 3 である。

[東京大学 2021年前期 理科 $\boxed{5}$]

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の２点

$\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$, $\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の２乗として定める。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ1つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

---

(1) $f(\theta)=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$ であり，

$$f'(\theta)=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)(-\sin\theta)$$

$$=2\{(\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)-(\cos\theta+3)\sin\theta\}$$

$$=2\{(\theta+\alpha)(1+\cos\theta)-2\sin\theta\}$$

$$=2(1+\cos\theta)\left(\theta+\alpha-\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) \quad \cdots①$$

となる。ここで，$g(\theta)=\theta+\alpha-\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$ とおくと，$g(\theta)$ は $0 \leqq \theta<\pi$ で連続であり，

$$g(\theta)=\theta+\alpha-\frac{2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\theta+\alpha-2\tan\frac{\theta}{2}$$

と変形できる。また，$0<\theta<\pi$ において $g'(\theta)=1-2\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}<0$

となること，$g(0)=\alpha>0$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}g(\theta)=-\infty$ であることから「$g(\theta_0)=0$ かつ $0<\theta_0<\pi$」を

満たす θ_0 がただ１つ存在して $\theta=\theta_0$ の前後で $g(\theta)$ は正から負へ符号変化する。…②

よって，①，②および $0<\theta<\pi$ において $1+\cos\theta>0$ であることから

$0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ１つ存在する。

(2)　(1)の考察により，$f(\theta)$ の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

よって，θ_0 が $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ を満たせば，$f(\theta)$ は $\theta = \theta_0$ において最大となる。

満たすべき条件は(1)の $g(x)$ に対して $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ となることより $\dfrac{\pi}{2} + \alpha - 2 < 0$

$\alpha > 0$ であることと合わせて求める α の値の範囲は $0 < \alpha < 2 - \dfrac{\pi}{2}$

[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{6}$]

定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$$

が x についての恒等式であるとする。

（1） $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ。

（2） $p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right),\quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものを1組求めよ。

（3） a を整数とする。x の４次式

$$x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

が有理数を係数とする２次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$ …①

（1） ① ⇔ $x^4+bx+c=x^4+\left(-p^2+q+r\right)x^2+p\left(r-q\right)x+qr$

これが x についての恒等式になるとき

$0=-p^2+q+r$ …② かつ $b=p\left(r-q\right)$ …③ かつ $c=qr$ …④

である。

②より $q+r=p^2$ …②´ さらに $p\neq 0$ と③より，$r-q=\dfrac{b}{p}$ …③´

であるから，②´と③´より $q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right),\ r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)$ …⑤

(2)　⑤を④に代入して

$$c=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)\quad\Leftrightarrow\quad p^4-\frac{b^2}{p^2}=4c$$

$$\Leftrightarrow\quad p^6-4cp^2-b^2=0\quad\cdots⑥$$

⑥に $b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)$，$c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$ を代入すると

$$p^6-4p^2\left\{-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)\right\}-\left\{\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)\right\}^2=0$$

$$p^6+\left(4a+3\right)\left(a^2+1\right)p^2-\left(a^2+1\right)^2\left(a+2\right)^2=0$$

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)^2\right\}=0$$

となるから，題意の $f(t),\ g(t)$ として

$$f(t)=t^2+1,\ g(t)=\left(t^2+1\right)\left(t+2\right)^2$$

が存在する。

(3)　$F(x)=x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$ とおく。

x の 4 次式 $F(x)$ が有理数係数の 2 つの 2 次式の積に因数分解できるとする。

$F(x)$ の 4 次の係数は 1 であることと，3 次の係数が 0 であることより，

①の形において， $p,\ q,\ r$ が有理数となる場合について考えればよい。

（Ⅰ） $p=0$ のとき

①の右辺の x の係数は 0 であるから，$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)=0$ である。

a は整数であるから $a=-2$

このとき，$F(x)=x^4+\frac{25}{4}=\left(x^2+q\right)\left(x^2+r\right)$ であり

係数を比較して $q+r=0,\ qr=\frac{25}{4}$ から $q^2=-\frac{25}{4}$ となって不適。

（Ⅱ） $p \neq 0$ のとき

(2)および $p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)^2 \neq 0$ であることから $p^2-\left(a^2+1\right)=0$

a は整数であるから， $p^2=a^2+1$ も整数であり， p は整数になる。

$p^2=a^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad (p+a)(p-a)=1$ より $\left(p+a,\ p-a\right)=\left(1,\ 1\right),\ \left(-1,\ -1\right)$

よって $(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$ となることから $a=0$ である。

このとき， $b=\left(0+1\right)\left(0+2\right)=2$ と(1)より $q,\ r$ も有理数となって条件を満たす。

以上から求める a は $a=0$ のみである。