［ 東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

定数$b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right),\quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものを1組求めよ。

(3) a を整数とする。x の４次式

$$x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

が有理数を係数とする２次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)\quad \cdots①$

(1) ① ⇔ $x^4+bx+c=x^4+\left(-p^2+q+r\right)x^2+p\left(r-q\right)x+qr$

これが x についての恒等式になるとき

$0=-p^2+q+r\quad\cdots②$ かつ $b=p\left(r-q\right)\quad\cdots③$ かつ $c=qr\quad\cdots④$

である。

②より $q+r=p^2\ \cdots②'$ さらに $p\neq 0$ と③より，$r-q=\dfrac{b}{p}\ \cdots③'$

であるから，②´と③´より $q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right),\ r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)\quad\cdots⑤$

(2)　⑤を④に代入して

$$c=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right) \quad \Leftrightarrow \quad p^4-\frac{b^2}{p^2}=4c$$

$$\Leftrightarrow \quad p^6-4cp^2-b^2=0 \quad \cdots⑥$$

⑥に $b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)$，$c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$ を代入すると

$$p^6-4p^2\left\{-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)\right\}-\left\{\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)\right\}^2=0$$

$$p^6+\left(4a+3\right)\left(a^2+1\right)p^2-\left(a^2+1\right)^2\left(a+2\right)^2=0$$

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)^2\right\}=0$$

となるから，題意の $f(t)$, $g(t)$ として

$$f(t)=t^2+1,\ g(t)=\left(t^2+1\right)\left(t+2\right)^2$$

が存在する。

(3)　$F(x)=x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$ とおく。

x の 4 次式 $F(x)$ が有理数係数の 2 つの 2 次式の積に因数分解できるとする。

$F(x)$ の 4 次の係数は 1 であることと，3 次の係数が 0 であることより，

①の形において，$p,\ q,\ r$ が有理数となる場合について考えればよい。

（Ⅰ）$p=0$ のとき

①の右辺の x の係数は 0 であるから，$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)=0$ である。

a は整数であるから　$a=-2$

このとき，$F(x)=x^4+\frac{25}{4}=\left(x^2+q\right)\left(x^2+r\right)$ であり

係数を比較して　$q+r=0,\ qr=\frac{25}{4}$ から　$q^2=-\frac{25}{4}$ となって不適。

（Ⅱ） $p\neq 0$ のとき

(2)および $p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)^2\neq 0$ であることから $p^2-\left(a^2+1\right)=0$

a は整数であるから， $p^2=a^2+1$ も整数であり， p は整数になる。

$p^2=a^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad (p+a)(p-a)=1$ より $\left(p+a,\ p-a\right)=\left(1,\ 1\right),\ \left(-1,\ -1\right)$

よって $(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$ となることから $a=0$ である。

このとき， $b=\left(0+1\right)\left(0+2\right)=2$ と(1)より $q,\ r$ も有理数となって条件を満たす。

以上から求める a は $a=0$ のみである。