[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{5}$]

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点

$A(-\alpha,\ -3)$, $P(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ1つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

---

(1) $f(\theta)=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$ であり，

$$f'(\theta)=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)(-\sin\theta)$$

$$=2\{(\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)-(\cos\theta+3)\sin\theta\}$$

$$=2\{(\theta+\alpha)(1+\cos\theta)-2\sin\theta\}$$

$$=2(1+\cos\theta)\left(\theta+\alpha-\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) \quad \cdots①$$

となる。ここで，$g(\theta)=\theta+\alpha-\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$ とおくと，$g(\theta)$ は $0 \leqq \theta<\pi$ で連続であり，

$$g(\theta)=\theta+\alpha-\frac{2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\theta+\alpha-2\tan\frac{\theta}{2}$$

と変形できる。また，$0<\theta<\pi$ において $g'(\theta)=1-2\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}<0$

となること，$g(0)=\alpha>0$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} g(\theta)=-\infty$ であることから「$g(\theta_0)=0$ かつ $0<\theta_0<\pi$」を

満たす θ_0 がただ 1 つ存在して $\theta=\theta_0$ の前後で $g(\theta)$ は正から負へ符号変化する。…②

よって，①，②および $0<\theta<\pi$ において $1+\cos\theta>0$ であることから

$0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ 1 つ存在する。

(2) (1)の考察により，$f(\theta)$の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，θ_0が$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$を満たせば，$f(\theta)$は$\theta=\theta_0$において最大となる。

満たすべき条件は(1)の$g(x)$に対して $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ となることより $\dfrac{\pi}{2}+\alpha-2<0$

$\alpha>0$ であることと合わせて求めるαの値の範囲は $0<\alpha<2-\dfrac{\pi}{2}$