[東京大学 2021年前期 理科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数$K,\ L$と正の整数$A,\ B$が$KA=LB$を満たしているとする。

Kを4で割った余りがLを4で割った余りと等しいならば,

Aを4で割った余りはBを4で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数$a,\ b$が$a>b$を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$に対して

$KA=LB$ となるような正の奇数$K,\ L$が存在することを示せ。

(3) $a,\ b$は(2)の通りとし，さらに$a-b$が2で割り切れるとする。

${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$を4で割った余りは，${}_{a}\mathrm{C}_{b}$を4で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$を4で割った余りを求めよ。

---

(1) 合同式の法は4とする。

Kを4で割った余りがLを4で割った余りと等しいので，$K\equiv L$

よって，$KA\equiv LA$ であり，$KA=LB$ より $LA\equiv LB$

Lは奇数であり，4と互いに素であるから $A\equiv B$ が成り立つ。

よって，Aを4で割った余りはBを4で割った余りと等しい。

(2)
$$A=\frac{(4a+1)\cdot 4a\cdot(4a-1)\cdot(4a-2)\cdot\cdots\cdot(4a-4b-1)}{(4b+1)\cdot 4b\cdot(4b-1)\cdot(4b-2)\cdot\cdots\cdot 1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b-1}{1}$$

であり，これは$4b+1$個の分数 $\dfrac{4a-4b+k}{k}$ （$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 4b+1$）の積である。これを

(Ⅰ)kが奇数であるもの,(Ⅱ)kが4で割り切れない偶数であるもの,(Ⅲ)kが4で割り切れるもの

に分けて考える。

(Ⅰ)について

$\dfrac{4a+1}{4b+1}\cdot\dfrac{4a-1}{4b-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4a-4b-1}{1}$ …① であるが，この分子・分母はすべて奇数であるから,

奇数$K_1,\ L_1$を用いて，分母の積をK_1，分子の積をL_1とおくことができる。

（Ⅱ）について

$$\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-6}{4b-6}\cdots\cdot\frac{4a-4b+2}{2}=\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{2a-3}{2b-3}\cdots\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\quad\cdots②$$ となるが，

この分母・分子はすべて奇数であるから，

奇数 $K_2,\ L_2$ を用いて，分母の積を K_2，分子の積を L_2 とおくことができる。

（Ⅲ）について

$$\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}={}_a\mathrm{C}_b=B$$

となる。

よって， $K=K_1K_2,\ L=L_1L_2$ とすれば， $K,\ L$ は正の奇数であり，

$A=\dfrac{L}{K}B$ となることから，題意は成り立つ。

(3)　$A,\ B,\ K,\ L$ を(2)のように定義する。$a-b$ が 2 の倍数であることから，

①と②について分母と分子の差は必ず 4 の倍数になる。

したがって，①と②の積について，分母 K と分子 L はそれぞれ 4 で割った余りが等しい奇数である。

よって，(1)より $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは， $B={}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)　合同式の法は 4 とする。

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37}={}_{4\cdot505+1}\mathrm{C}_{4\cdot9+1}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9={}_{4\cdot126+1}\mathrm{C}_{4\cdot2+1}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2=\frac{126\cdot125}{2\cdot1}=63\cdot125\equiv3\cdot1=3$$

となることから，求める余りは 3 である。