[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{3}$]

関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 $\mathrm{A}\left(1,\ f(1)\right)$ における C の接線を

$$\ell : y=g(x)$$

とする。

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ1つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\left\{f(x)-g(x)\right\}^2 dx$$

を計算せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ に対し，$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{-x^2+3}{\left(x^2+3\right)^2}$ であり，

$f'(1)=\dfrac{1}{8}$，$f(1)=\dfrac{1}{4}$ であるから，$\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ における C の接線方程式は

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

である。

このとき，
$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 8x=\left(x+1\right)\left(x^2+3\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3+x^2-5x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2(x+3)=0$$

よって　$x=1,\ -3$

したがって，C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ1つ存在し，その x 座標は -3 である。

(2)　求める定積分は

$$\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2 dx=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+3\right)^2}dx-\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx+\frac{1}{64}\int_{-3}^{1}(x+1)^2 dx$$

であり，$I=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+3\right)^2}dx$，$J=\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx$，$K=\int_{-3}^{1}(x+1)^2 dx$ とおく。

I について，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，

被積分関数について　$x^2+3=3\left(\tan^2\theta+1\right)=\frac{3}{\cos^2\theta}$

積分変数について　$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

積分区間について　$x:-3\to 1$ のとき $\theta:-\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{6}$

であるから，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}3\tan^2\theta\cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$$

J について，

$$\frac{x(x+1)}{x^2+3}=\frac{x^2+x}{x^2+3}=\frac{x^2+3+x-3}{x^2+3}=\frac{x^2+3}{x^2+3}+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}=1+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}$$

であるから，第 3 項については置換積分して

$$J=\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{x}{x^2+3}\right)dx-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}3\cdot\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}\log\left(x^2+3\right)\right]_{-3}^{1}-\sqrt{3}[\theta]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=4+\frac{1}{2}(\log 4-\log 12)-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

K について，

$$K = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-3}^{1} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

となる。

よって，求める定積分は

$$I - \frac{1}{4}J + \frac{1}{64}K = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \right) + \frac{1}{64} \cdot \frac{16}{3}$$

$$= \frac{5}{24}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}$$