［ 東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{2}$ ］

複素数a, b, cに対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。iを虚数単位とする。

（1）α, β, γを複素数とする。

$f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ が成り立つとき，a, b, cをそれぞれα, β, γで表せ。

（2）$f(0),\ f(1),\ f(i)$がいずれも1以上2以下の実数であるとき，

$f(2)$のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

（1） $f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ より

$c=\alpha$ …①，$a+b+c=\beta$ …②，$-a+bi+c=\gamma$ …③

①を②，③に代入して $a+b=\beta-\alpha$ …②´，$-a+bi=\gamma-\alpha$ …③´

②´＋③´より $(1+i)b=-2\alpha+\beta+\gamma$

よって $b=\dfrac{-2\alpha+\beta+\gamma}{1+i}=\dfrac{(-2\alpha+\beta+\gamma)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$

したがって $a=\beta-\alpha-b=\beta-\alpha-\left\{(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma\right\}=-i\alpha+\dfrac{1+i}{2}\beta-\dfrac{1-i}{2}\gamma$

（2） $f(2)=4a+2b+c$

$$=4\left(-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma\right)+2\left\{(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right\}+\alpha$$

$$=-\alpha+3\beta+\gamma+(-2\alpha+\beta+\gamma)i$$

$$=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma$$

となる。

$1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$，$1\leqq\gamma\leqq2$のもとで，点$f(2)$の存在範囲を調べる。

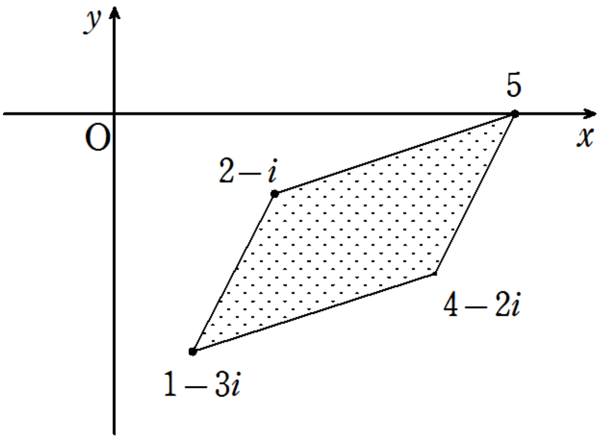
$\mathrm{A}_\alpha\left((-1-2i)\alpha\right),\ \mathrm{B}_\beta\left((3+i)\beta\right)$とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_\alpha}+\overrightarrow{\mathrm{OB}_\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと，

α, βが$1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$を満たして変化するとき，

点Qの存在範囲は$\alpha=1,\ \beta=1$に対応するQをCとして

C を 1 つの頂点として 2 つのベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ の張る平行四辺形の内部および周上であり，

次の図のようになる。



$f(2)$ の存在範囲は，この平行四辺形を $(-1+i)\gamma$ （$1\leqq\gamma\leqq2$）だけ平行移動させたときに通過する

範囲であるから，これを図示すると，次の図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。