

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C: y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、
他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

- (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1) $C: y = x^2 + ax + b \cdots \textcircled{1}$ と $y = -x^2$ から y を消去すると

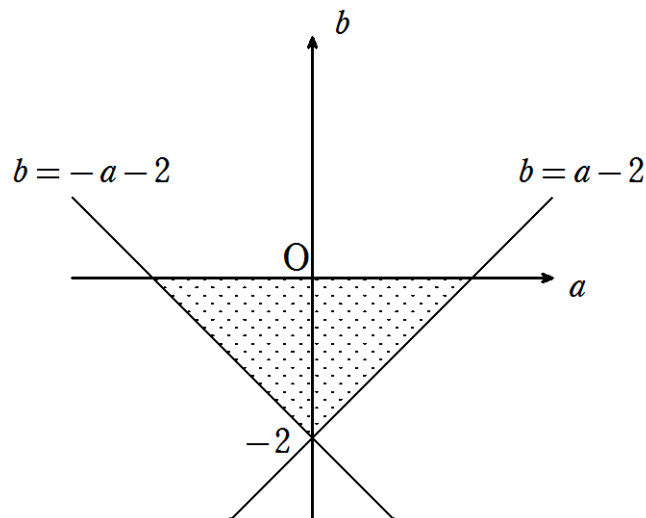
$$x^2 + ax + b = -x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + ax + b = 0$$

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \text{ とおくと}$$

求める条件は $f(-1) > 0$ かつ $f(0) < 0$ かつ $f(1) > 0$ である。

よって、 $2 - a + b > 0$ かつ $b < 0$ かつ $2 + a + b > 0 \cdots \textcircled{2}$ となるから

これを図示すると次の図の打点部分となる。ただし、境界は含まない。



(2) 放物線 C の通りうる範囲は、①かつ②を満たす実数 a, b が存在するような (x, y) の範囲である。

① $\Leftrightarrow b = -xa + y - x^2$ であり、これは ab 平面上の傾き $-x$ 、 b 切片 $y - x^2$ の直線を表す。

この直線と(1)で求めた領域が共有点をもつような場合を考えればよい。

$g(a) = -xa + y - x^2$ とおく。

(I) $y - x^2 \leq -2$ すなわち $y \leq x^2 - 2$ のとき

満たすべき条件は、 $g(-2) > 0$ または $g(2) > 0$

よって $2x + y - x^2 > 0$ または $-2x + y - x^2 > 0$

したがって $y > x^2 - 2x$ または $y > x^2 + 2x$

(II) $-2 < y - x^2 < 0$ すなわち $x^2 - 2 < y < x^2$ のとき

必ず共有点をもつので、 $x^2 - 2 < y < x^2$

(III) $y - x^2 \geq 0$ すなわち $y \geq x^2$ のとき

満たすべき条件は、 $g(-2) < 0$ または $g(2) < 0$

よって $2x + y - x^2 < 0$ または $-2x + y - x^2 < 0$

したがって $y < x^2 - 2x$ または $y < x^2 + 2x$

以上、(I)(II)(III)をまとめて図示すると、次の図の打点部分となる。ただし、境界は含まない。

