[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{1}$]

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線

$$C: y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，

他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

複素数$a,\ b,\ c$に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。iを虚数単位とする。

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$を複素数とする。

$f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c$をそれぞれ$\alpha,\ \beta,\ \gamma$で表せ。

(2) $f(0),\ f(1),\ f(i)$がいずれも1以上2以下の実数であるとき，

$f(2)$のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$のグラフをCとする。点$\mathrm{A}\big(1,\ f(1)\big)$における$C$の接線を

$$\ell : y=g(x)$$

とする。

(1) Cとℓの共有点でAと異なるものがただ1つ存在することを示し，その点のx座標を求めよ。

(2) (1)で求めた共有点のx座標をαとする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\left\{f(x)-g(x)\right\}^2dx$$

を計算せよ。

[東京大学 2021年前期 理科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば,

A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとする。このとき, $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$, $B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して

$KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ。

(3) $a,\ b$ は(2)の通りとし,さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。

${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは, ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

[東京大学 2021 年前期 理科 $\boxed{5}$]

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点

$\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$, $\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ1つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right),\quad c=-\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a^2+1\right)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものを1組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a^2+1\right)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。