[東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{1}$]

★──────★

aを正の実数とする。座標平面上の曲線Cを $y=ax^3-2x$ で定める。

原点を中心とする半径 1 の円とCの共有点の個数が 6 個であるようなaの範囲を求めよ。

★──────★

$C: y=ax^3-2x$と円$x^2+y^2=1$からyを消去すると

$x^2+(ax^3-2x)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^6-4ax^4+5x^2=1$

$x^2=t$ とおくと $a^2t^3-4at^2+5t-1=0 \quad \cdots$①

$f(t)=a^2t^3-4at^2+5t-1$ とおく。

$t \geqq 0$であり，$t>0$に対しxは$x=\pm\sqrt{t}$の 2 つが対応するので，

共有点の個数が 6 個となる条件は，

tの方程式①が$t>0$の範囲に異なる 3 つの実数解を持つことである。

$f'(t)=3a^2t^2-8at+5=(at-1)(3at-5)$ であり，

$a>0$のとき $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{5}{3a}$ であるから，$f(t)$の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		↗		↘		↗

$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{a}-1=\dfrac{2}{a}-1$，$f\left(\dfrac{5}{3a}\right)=\dfrac{125}{27a}-\dfrac{100}{9a}+\dfrac{25}{3a}-1=\dfrac{50}{27a}-1$

であるから，$f(t)=0$が$t>0$の範囲に異なる 3 つの実数解をもつaの値の範囲は

$\dfrac{50}{27a}-1<0<\dfrac{2}{a}-1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{50}{27a}<1<\dfrac{2}{a}$ すなわち $\dfrac{50}{27}<a<2$

［ 東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

N を5以上の整数とする。

1以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし1は必ず選ぶこととする。

選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件１：S は連続する２個の整数からなる集合を1つも含まない・

条件２：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも1つ含む。

ただし，２以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 ℓ を用いて $\{\ell,\ \ell+1,\ \cdots\cdots,\ \ell+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する３個の整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}\{7,\ 8,\ 9\}\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む。

(1) 条件１を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件２を満たすような選び方は何通りあるか。

(1)　□を付けた数を選んだ数とする。

集合 S は1を必ず含むから，条件１を満たすような選び方は

$$\boxed{1}\quad 2\quad \underline{3\quad 4\quad \cdots\quad N\quad N+1\quad \cdots\quad 2N}$$

の下線部の３から $2N$ の $2N-2$ 個の数からどの２個も連続しないように

$N-1$ 個の整数を選ぶ方法である。

この選び方は，$N-1$ 個の●と $N-1$ 個の○を隣り合わないように並べる方法と同じである。

よって，$N-1$ 個の●の間の $N-2$ ヶ所と両端の２ヶ所を合わせた N ヶ所から，

○を入れる $N-1$ ヶ所を選ぶ場合を考えて ${}_N\mathrm{C}_{N-1}=N$ 通り。

(2)　条件２を満たすような集合 S に含まれる整数のうち

(Ⅰ) N 個の整数が連続する場合

・$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\cdots$ $\boxed{N}$ が連続する整数となるとき，

この選び方だけであるから１通り。

（Ⅱ）$N-1$個の整数だけが連続する場合

・$\boxed{1}$　$\boxed{2}$　$\cdots$　$\boxed{N-1}$　が連続する整数となるとき，

もう 1 つの数を選ぶ際，N を除く残りの N 個から 1 個を選ぶ場合を考えて　${}_N\mathrm{C}_1 = N$　通り。

・$\boxed{3}$　$\boxed{4}$　$\cdots$　$\boxed{N+1}$

・$\boxed{4}$　$\boxed{5}$　$\cdots$　$\boxed{N+2}$

$\vdots$

・$\boxed{N+2}$　$\boxed{N+3}$　$\cdots$　$\boxed{2N}$　が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶことから，それぞれ 1 通りずつあるので N 通り。

よってこのとき，$N+N=2N$　通り。

（Ⅲ）$N-2$個の整数だけが連続する場合

・$\boxed{1}$　$\boxed{2}$　$\cdots$　$\boxed{N-2}$　が連続する整数となるとき，

もう 2 つの数を選ぶ際，$N-1$を除く残りの $N+1$個から 2 個を選ぶ場合を考えて

${}_{N+1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(N+1)N}{2}$　通り。

・$\boxed{3}$　$\boxed{4}$　$\cdots$　$\boxed{N}$

・$\boxed{4}$　$\boxed{5}$　$\cdots$　$\boxed{N+1}$

$\vdots$

・$\boxed{N+2}$　$\boxed{N+3}$　$\cdots$　$\boxed{2N-1}$　が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶこと，そしてそれぞれ前後の数を除く残りの $N-1$個から 1 個を選ぶ場合を考えて

それぞれ　${}_{N-1}\mathrm{C}_1 = N-1$　通りあるので，これらは　$N(N-1)$　通り。

・$\boxed{N+3}$　$\boxed{N+4}$　$\cdots$　$\boxed{2N}$　が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶこと，そして２，$N+2$を除く残りの N 個から 1 個を選ぶ場合を考えて

${}_N\mathrm{C}_1 = N$　通り。

よってこのとき，$\dfrac{(N+1)N}{2}+N(N-1)+N = \dfrac{1}{2}N\left(3N+1\right)$　通り。

以上，（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）より条件２を満たすような選び方は

$1+2N+\dfrac{1}{2}N\left(3N+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(N+1\right)\left(3N+2\right)$　通り。

[東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，

他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1)　$C : y = x^2 + ax + b$　…①　と $y = -x^2$ から y を消去すると

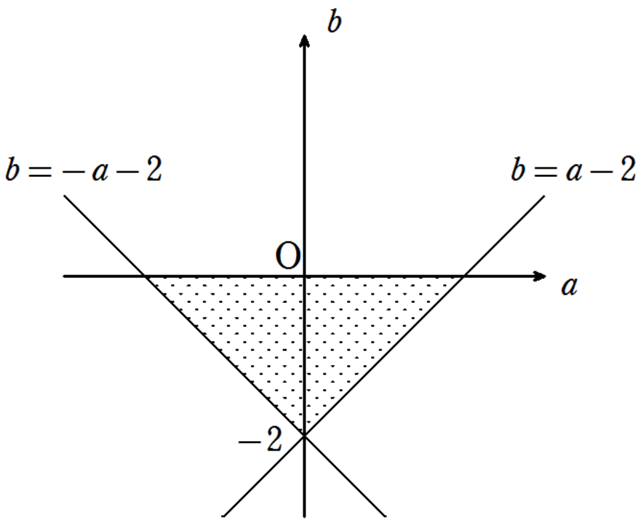
$x^2 + ax + b = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + ax + b = 0$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$　とおくと

求める条件は　$f(-1) > 0$　かつ　$f(0) < 0$　かつ　$f(1) > 0$　である。

よって，$2 - a + b > 0$　かつ　$b < 0$　かつ　$2 + a + b > 0$　…②　となるから

これを図示すると次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



(2)　放物線Cの通りうる範囲は，①かつ②を満たす実数a, bが存在するような$(x,\ y)$の範囲である。

①　⇔　$b=-xa+y-x^2$　であり，これはab平面上の傾き$-x$，b切片$y-x^2$の直線を表す。

この直線と(1)で求めた領域が共有点をもつような場合を考えればよい。

$g(a)=-xa+y-x^2$　とおく。

（Ⅰ）$y-x^2\leqq -2$　すなわち　$y\leqq x^2-2$　のとき

満たすべき条件は，$g(-2)>0$　または　$g(2)>0$

よって　$2x+y-x^2>0$　または　$-2x+y-x^2>0$

したがって　$y>x^2-2x$　または　$y>x^2+2x$

（Ⅱ）$-2<y-x^2<0$　すなわち　$x^2-2<y<x^2$　のとき

必ず共有点をもつので，$x^2-2<y<x^2$

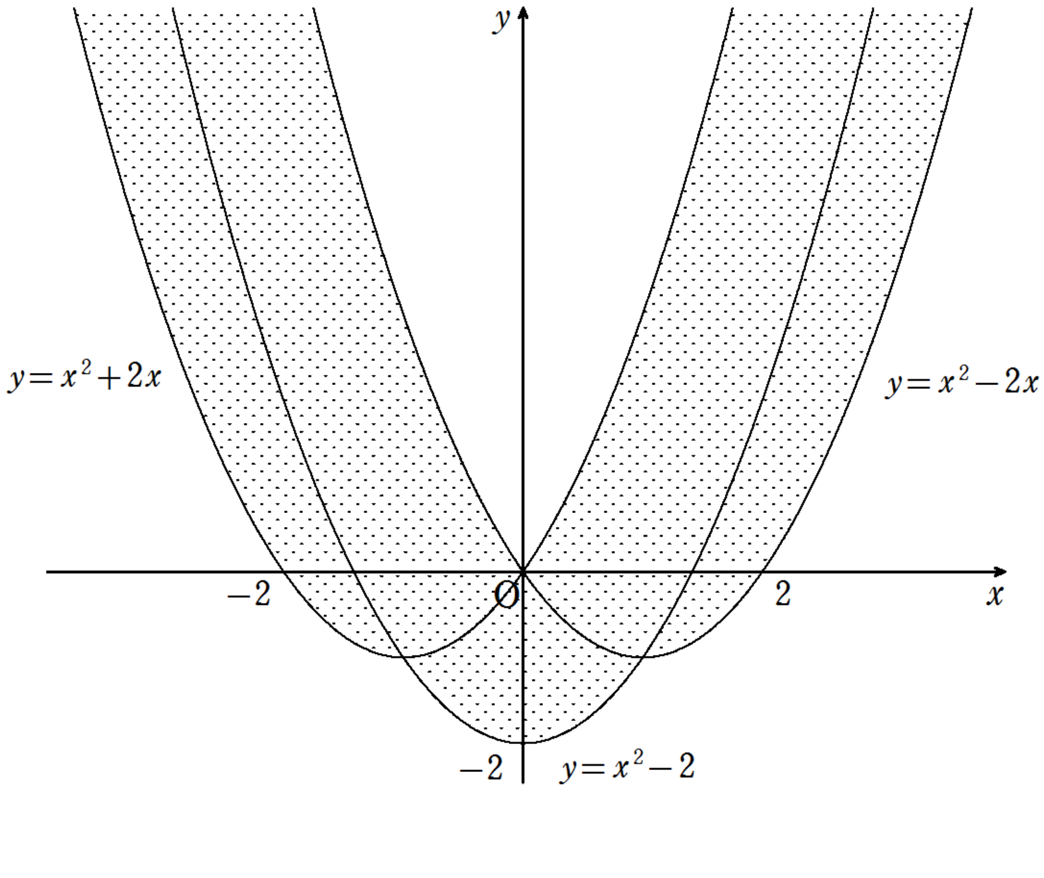
（Ⅲ）$y-x^2\geqq 0$　すなわち　$y\geqq x^2$　のとき

満たすべき条件は，$g(-2)<0$　または　$g(2)<0$

よって　$2x+y-x^2<0$　または　$-2x+y-x^2<0$

したがって　$y<x^2-2x$　または　$y<x^2+2x$

以上，(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)をまとめて図示すると，次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



［ 東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{4}$ ］

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする。

K を4で割った余りが L を4で割った余りと等しいならば，

A を4で割った余りは B を4で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して

$KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ。

(3) $a,\ b$ は(2)の通りとし，さらに $a-b$ が2で割り切れるとする。

${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を4で割った余りは，${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を4で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を4で割った余りを求めよ。

(1) 合同式の法は 4 とする。

K を4で割った余りが L を4で割った余りと等しいので，$K\equiv L$

よって，$KA\equiv LA$ であり，$KA=LB$ より $LA\equiv LB$

L は奇数であり，4 と互いに素であるから $A\equiv B$ が成り立つ。

よって，A を4で割った余りは B を4で割った余りと等しい。

(2) $$A=\frac{(4a+1)\cdot 4a\cdot(4a-1)\cdot(4a-2)\cdots\cdots(4a-4b-1)}{(4b+1)\cdot 4b\cdot(4b-1)\cdot(4b-2)\cdots\cdots 1}$$

$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdots\cdots\frac{4a-4b-1}{1}$$

であり，これは $4b+1$ 個の分数 $\dfrac{4a-4b+k}{k}$ （$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 4b+1$）の積である。これを

(Ⅰ) k が奇数であるもの，(Ⅱ) k が 4 で割り切れない偶数であるもの，(Ⅲ) k が 4 で割り切れるもの

に分けて考える。

(Ⅰ)について

$\dfrac{4a+1}{4b+1}\cdot\dfrac{4a-1}{4b-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4a-4b-1}{1}$ …① であるが，この分子・分母はすべて奇数であるから，

奇数 K_1, L_1 を用いて，分母の積を K_1，分子の積を L_1 とおくことができる。

(Ⅱ)について

$\dfrac{4a-2}{4b-2}\cdot\dfrac{4a-6}{4b-6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4a-4b+2}{2}=\dfrac{2a-1}{2b-1}\cdot\dfrac{2a-3}{2b-3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2a-2b+1}{1}$ …② となるが，

この分母・分子はすべて奇数であるから，

奇数 K_2, L_2 を用いて，分母の積を K_2，分子の積を L_2 とおくことができる。

(Ⅲ)について

$$\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}={}_a\mathrm{C}_b=B$$

となる。

よって，$K=K_1K_2,\ L=L_1L_2$ とすれば，$K,\ L$ は正の奇数であり，

$A=\dfrac{L}{K}B$ となることから，題意は成り立つ。

(3)　$A,\ B,\ K,\ L$ を(2)のように定義する。$a-b$ が 2 の倍数であることから，

①と②について分母と分子の差は必ず 4 の倍数になる。

したがって，①と②の積について，分母 K と分子 L はそれぞれ 4 で割った余りが等しい奇数である。

よって，(1)より $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは，$B={}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)　合同式の法は 4 とする。

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37}={}_{4\cdot505+1}\mathrm{C}_{4\cdot9+1}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9={}_{4\cdot126+1}\mathrm{C}_{4\cdot2+1}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2=\frac{126\cdot125}{2\cdot1}=63\cdot125\equiv3\cdot1=3$$

となることから，求める余りは 3 である。