



以下の問いに答えよ。

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば、

A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき、 $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して

$KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

- (3) a, b は(2)の通りとし、さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。

${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは、 ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。



- (1) 合同式の法は 4 とする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいので、 $K \equiv L$

よって、 $KA \equiv LA$ であり、 $KA = LB$ より $LA \equiv LB$

L は奇数であり、4 と互いに素であるから $A \equiv B$ が成り立つ。

よって、 A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい。

$$(2) A = \frac{(4a+1) \cdot 4a \cdot (4a-1) \cdot (4a-2) \cdots (4a-4b-1)}{(4b+1) \cdot 4b \cdot (4b-1) \cdot (4b-2) \cdots 1}$$

$$= \frac{4a+1}{4b+1} \cdot \frac{4a}{4b} \cdot \frac{4a-1}{4b-1} \cdot \frac{4a-2}{4b-2} \cdots \frac{4a-4b-1}{1}$$

であり、これは $4b+1$ 個の分数 $\frac{4a-4b+k}{k}$ ($k=1, 2, 3, \dots, 4b+1$) の積である。これを

(I) k が奇数であるもの、(II) k が 4 で割り切れない偶数であるもの、(III) k が 4 で割り切れるもの

に分けて考える。

(I) について

$\frac{4a+1}{4b+1} \cdot \frac{4a-1}{4b-1} \cdots \frac{4a-4b-1}{1} \cdots \textcircled{1}$ であるが、この分子・分母はすべて奇数であるから、

奇数 K_1, L_1 を用いて、分母の積を K_1 、分子の積を L_1 とおくことができる。

(Ⅱ)について

$\frac{4a-2}{4b-2} \cdot \frac{4a-6}{4b-6} \cdots \frac{4a-4b+2}{2} = \frac{2a-1}{2b-1} \cdot \frac{2a-3}{2b-3} \cdots \frac{2a-2b+1}{1} \cdots \textcircled{2}$ となるが、

この分母・分子はすべて奇数であるから、

奇数 K_2, L_2 を用いて、分母の積を K_2 、分子の積を L_2 とおくことができる。

(Ⅲ)について

$\frac{4a}{4b} \cdot \frac{4a-4}{4b-4} \cdot \frac{4a-2}{4b-2} \cdots \frac{4a-4b+4}{4} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \frac{a-2}{b-2} \cdots \frac{a-b+1}{1} = {}_a C_b = B$

となる。

よって、 $K = K_1 K_2, L = L_1 L_2$ とすれば、 K, L は正の奇数であり、

$A = \frac{L}{K} B$ となることから、題意は成り立つ。

(3) A, B, K, L を(2)のように定義する。 $a-b$ が2の倍数であることから、

①と②について分母と分子の差は必ず4の倍数になる。

したがって、①と②の積について、分母 K と分子 L はそれぞれ4で割った余りが等しい奇数である。

よって、(1)より $A = {}_{4a+1} C_{4b+1}$ を4で割った余りは、 $B = {}_a C_b$ を4で割った余りと等しい。

(4) 合同式の法は4とする。

$${}_{2021} C_{37} \equiv {}_{4 \cdot 505 + 1} C_{4 \cdot 9 + 1} \equiv {}_{505} C_9 \equiv {}_{4 \cdot 126 + 1} C_{4 \cdot 2 + 1} \equiv {}_{126} C_2 = \frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 1} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 = 3$$

となることから、求める余りは3である。

