[東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，

他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1)　$C : y = x^2 + ax + b$　…①　と $y = -x^2$ から y を消去すると

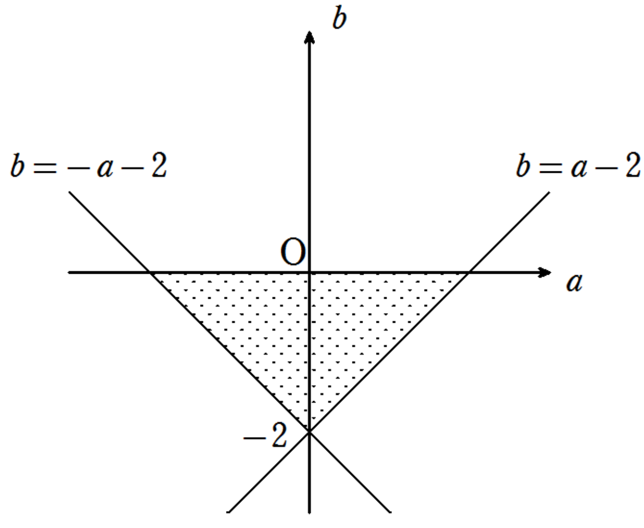
$x^2 + ax + b = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + ax + b = 0$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$　とおくと

求める条件は　$f(-1) > 0$　かつ　$f(0) < 0$　かつ　$f(1) > 0$　である。

よって，$2 - a + b > 0$　かつ　$b < 0$　かつ　$2 + a + b > 0$　…②　となるから

これを図示すると次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



(2)　放物線Cの通りうる範囲は，①かつ②を満たす実数a, bが存在するような$(x,\ y)$の範囲である。

① ⇔ $b=-xa+y-x^2$　であり，これはab平面上の傾き$-x$，b切片$y-x^2$の直線を表す。

この直線と(1)で求めた領域が共有点をもつような場合を考えればよい。

$g(a)=-xa+y-x^2$ とおく。

(Ⅰ) $y-x^2\leqq -2$ すなわち $y\leqq x^2-2$ のとき

満たすべき条件は，$g(-2)>0$ または $g(2)>0$

よって $2x+y-x^2>0$ または $-2x+y-x^2>0$

したがって $y>x^2-2x$ または $y>x^2+2x$

(Ⅱ) $-2<y-x^2<0$ すなわち $x^2-2<y<x^2$ のとき

必ず共有点をもつので，$x^2-2<y<x^2$

(Ⅲ) $y-x^2\geqq 0$ すなわち $y\geqq x^2$ のとき

満たすべき条件は，$g(-2)<0$ または $g(2)<0$

よって $2x+y-x^2<0$ または $-2x+y-x^2<0$

したがって $y<x^2-2x$ または $y<x^2+2x$

以上，(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)をまとめて図示すると，次の図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。