[東京大学 2021年前期 文科 $\boxed{2}$]

N を5以上の整数とする。

1以上$2N$ 以下の整数から，相異なるN 個の整数を選ぶ。ただし1は必ず選ぶこととする。

選んだ数の集合をSとし，Sに関する以下の条件を考える。

条件１：Sは連続する2個の整数からなる集合を1つも含まない・

条件２：Sは連続する$N-2$個の整数からなる集合を少なくとも1つ含む。

ただし，2以上の整数kに対して，連続するk個の整数からなる集合とは，ある整数ℓを用いて

$\{\ell,\ \ell+1,\ \cdots\cdots,\ \ell+k-1\}$と表される集合を指す。例えば$\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$は連続する3個の

整数からなる集合$\{1, 2, 3\}\{7, 8, 9\}\{8, 9, 10\}$を含む。

(1) 条件１を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件２を満たすような選び方は何通りあるか。

(1)　□を付けた数を選んだ数とする。

集合Sは1を必ず含むから，条件１を満たすような選び方は

$\boxed{1}\quad 2\quad \underline{3\quad 4\quad \cdots\quad N\quad N+1\quad \cdots\quad 2N}$

の下線部の３から$2N$ の$2N-2$個の数からどの 2 個も連続しないように

$N-1$個の整数を選ぶ方法である。

この選び方は，$N-1$個の●と$N-1$個の○を隣り合わないように並べる方法と同じである。

よって，$N-1$個の●の間の$N-2$ヶ所と両端の 2 ヶ所を合わせたN ヶ所から，

○を入れる$N-1$ヶ所を選ぶ場合を考えて ${}_N\mathrm{C}_{N-1}=N$ 通り。

(2)　条件２を満たすような集合Sに含まれる整数のうち

(Ｉ) N 個の整数が連続する場合

・$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\cdots$ $\boxed{N}$ が連続する整数となるとき，

この選び方だけであるから１通り。

（Ⅱ）$N-1$個の整数だけが連続する場合

・$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\cdots$ $\boxed{N-1}$ が連続する整数となるとき，

もう 1 つの数を選ぶ際，N を除く残りの N 個から 1 個を選ぶ場合を考えて ${}_N\mathrm{C}_1 = N$ 通り。

・$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\cdots$ $\boxed{N+1}$

・$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\cdots$ $\boxed{N+2}$

$\vdots$

・$\boxed{N+2}$ $\boxed{N+3}$ $\cdots$ $\boxed{2N}$ が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶことから，それぞれ 1 通りずつあるので N 通り。

よってこのとき，$N+N=2N$ 通り。

（Ⅲ）$N-2$個の整数だけが連続する場合

・$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\cdots$ $\boxed{N-2}$ が連続する整数となるとき，

もう 2 つの数を選ぶ際，$N-1$を除く残りの $N+1$個から 2 個を選ぶ場合を考えて

${}_{N+1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(N+1)N}{2}$ 通り。

・$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\cdots$ $\boxed{N}$

・$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\cdots$ $\boxed{N+1}$

$\vdots$

・$\boxed{N+2}$ $\boxed{N+3}$ $\cdots$ $\boxed{2N-1}$ が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶこと，そしてそれぞれ前後の数を除く残りの $N-1$個から 1 個を選ぶ場合を考えて

それぞれ ${}_{N-1}\mathrm{C}_1 = N-1$ 通りあるので，これらは $N(N-1)$ 通り。

・$\boxed{N+3}$ $\boxed{N+4}$ $\cdots$ $\boxed{2N}$ が連続する整数となるとき，

1 は必ず選ぶこと，そして２，$N+2$を除く残りの N 個から 1 個を選ぶ場合を考えて

${}_N\mathrm{C}_1 = N$ 通り。

よってこのとき，$\dfrac{(N+1)N}{2}+N(N-1)+N = \dfrac{1}{2}N\left(3N+1\right)$ 通り。

以上，(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)より条件２を満たすような選び方は

$1+2N+\dfrac{1}{2}N\left(3N+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(N+1\right)\left(3N+2\right)$ 通り。