[東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{1}$]

★―――――――――――――――――――――――――――★

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。

原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

★―――――――――――――――――――――――――――★

$C : y = ax^3 - 2x$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ から y を消去すると

$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 = 1$

$x^2 = t$ とおくと $a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0 \quad \cdots$①

$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおく。

$t \geqq 0$ であり，$t > 0$ に対し x は $x = \pm\sqrt{t}$ の 2 つが対応するので，

共有点の個数が 6 個となる条件は，

t の方程式①が $t > 0$ の範囲に異なる 3 つの実数解を持つことである。

$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = (at - 1)(3at - 5)$ であり，

$a > 0$ のとき $0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{5}{3a}$ であるから，$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{a}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		↗		↘		↗

$f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{a} + \dfrac{5}{a} - 1 = \dfrac{2}{a} - 1$，$f\left(\dfrac{5}{3a}\right) = \dfrac{125}{27a} - \dfrac{100}{9a} + \dfrac{25}{3a} - 1 = \dfrac{50}{27a} - 1$

であるから，$f(t) = 0$ が $t > 0$ の範囲に異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲は

$\dfrac{50}{27a} - 1 < 0 < \dfrac{2}{a} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{50}{27a} < 1 < \dfrac{2}{a}$ すなわち $\dfrac{50}{27} < a < 2$