[東京大学 2021年前期 文科 $\boxed{1}$]

aを正の実数とする。座標平面上の曲線Cを $y = ax^3 - 2x$ で定める。

原点を中心とする半径1の円とCの共有点の個数が6個であるようなaの範囲を求めよ。

［ 東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

N を5以上の整数とする。

1以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし1は必ず選ぶこととする。

選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件１：S は連続する２個の整数からなる集合を1つも含まない・

条件２：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも1つ含む。

ただし，２以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 ℓ を用いて

$\{\ell,\ \ell+1,\ \cdots\cdots,\ \ell+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する３個の

整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}\{7,\ 8,\ 9\}\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む。

(1) 条件１を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件２を満たすような選び方は何通りあるか。

[東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，

他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

［ 東京大学 2021 年前期 文科 $\boxed{4}$ ］

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする。

K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，

A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとする。このとき， $A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$， $B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して

$KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ。

(3) $a,\ b$ は(2)の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。

${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは， ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。