定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=\left(a^2+1\right)\left(a+2\right),\quad c=-\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a^2+1\right)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものを1組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4+\left(a^2+1\right)\left(a+2\right)x-\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a^2+1\right)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。