[東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{1}$]

a, b, c, p を実数とする。不等式

$ax^2+bx+c>0$

$bx^2+cx+a>0$

$cx^2+ax+b>0$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1)　a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。

(2)　a, b, c のうち，少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3)　$p=0$ であることを示せ。

(1) $ax^2+bx+c>0$　…①，　$bx^2+cx+a>0$　…②，　$cx^2+ax+b>0$　…③

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致している　…④

とする。

「a, b, c はすべて 0 以上」を否定すると

「a, b, c の少なくとも 1 つは 0 未満」となる。

$a<0$ であると仮定する。

このとき，十分大きな x に対して　$ax^2+bx+c<0$　となるので，④に反する。

よって，$a\geqq 0$ である。a, b, c は対等であり，

同様にして，$b\geqq 0,\ c\geqq 0$　であるから，題意は示された。

(2) $a>0$　かつ　$b>0$　かつ　$c>0$　とする。

このとき，$\lim_{x\to-\infty}\left(ax^2+bx+c\right)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}\left(bx^2+cx+a\right)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}\left(cx^2+ax+b\right)=\infty$

となるが，十分に絶対値の大きい負の実数 x について，

①②③を満たすが，④を満たさない。

よって，(1)の結果と合わせて題意は示された。

(3) (2)より a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 であるので，0 の個数で場合分けをする。

（ⅰ） a, b, c がすべて 0 のとき

$a=b=c=0$ のときであり，①②③をすべて満たす実数 x は存在しないため，不適。

（ⅱ） a, b, c のうち 2 つが 0 のとき

$a=b=0,\ c>0$ とすると，①②③はそれぞれ

$c>0,\ cx>0,\ cx^2>0$

となるが，

$cx>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>0$ であり，このとき①②③はすべて満たされ， $p=0$ となる。

a, b, c は対等であるから， $b=c=0,\ c=a=0$ の場合にも $p=0$ となる。

（ⅲ） a, b, c のうち 1 つが 0 のとき

$a=0,\ b>0,\ c>0$ とすると，①②③はそれぞれ

$bx+c>0,\ x(bx+c)>0,\ cx^2+b>0$

となるが，

$bx+c>0,\ x(bx+c)>0$ より $x>0$ であり，このとき①②③はすべて満たされ，$p=0$ となる。

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より， $p=0$ である。

［ 東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{2}$ ］

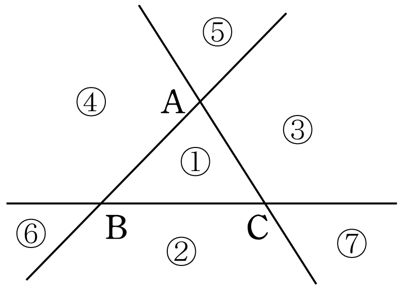
平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す。また， P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2\leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3$$

を満たしながら動くとき， X の動きうる範囲の面積を求めよ。

直線 AB, BC, CA で平面を図のような 7 つの領域に分ける。



$S=\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}$ とおく。

（ｉ）X が①にあるとき

$S=\triangle\mathrm{ABC}=1$ となるので不適。

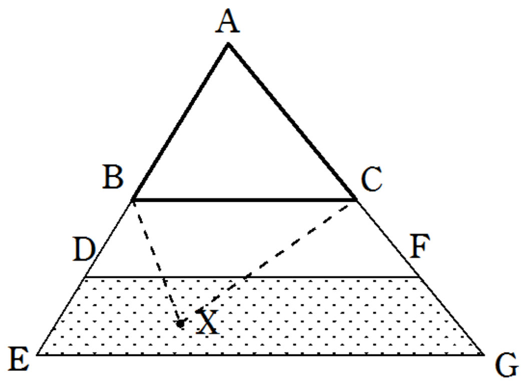
（ⅱ）X が②にあるとき

$S=2\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{BCX}+1$

より $2\leqq S\leqq 3$ となるのは $\dfrac{1}{2}\leqq \triangle\mathrm{BCX}\leqq 1$ のときである。

BC を底辺としたときの $\triangle\mathrm{ABC}$ との高さの比を考えて，次の図のような台形 DEFG の周と内部を動く。$\mathrm{AB}:\mathrm{BD}:\mathrm{DE}=2:1:1$ である。

X が③④にあるときも同様である。



（iii）X が⑤にあるとき

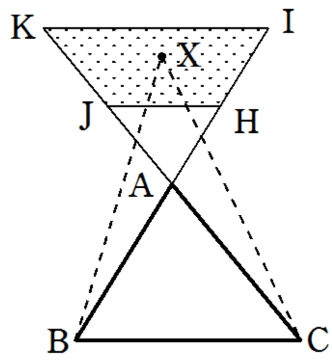
$$S = 2\triangle \mathrm{BCX} - \triangle \mathrm{ABC} = 2\triangle \mathrm{BCX} - 1$$

より $2 \leqq S \leqq 3$ となるのは $\dfrac{3}{2} \leqq \triangle \mathrm{BCX} \leqq 2$ のときである。

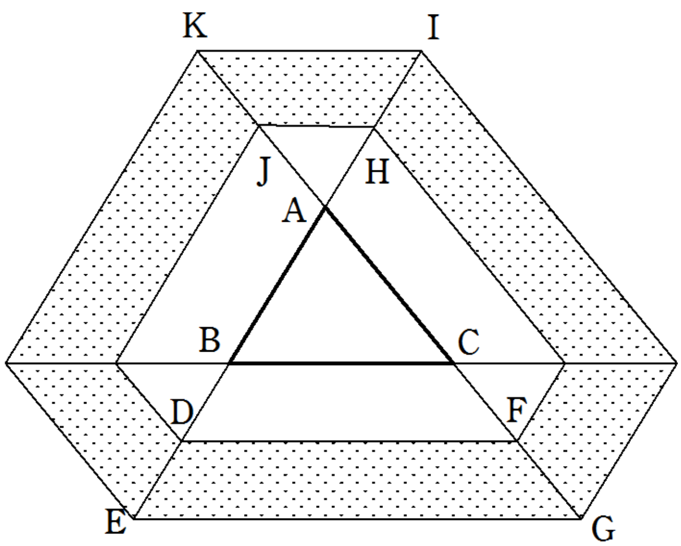
BC を底辺としたときの△ABC との高さの比を考えて，次の図のような

台形 HIKJ の周と内部を動く。$\mathrm{BA}:\mathrm{AH}:\mathrm{HI} = \mathrm{CA}:\mathrm{AJ}:\mathrm{JK} = 2:1:1$ である。

X が⑥⑦にあるときも同様である。



(i)(ii)(iii)より，求める領域は次の図の打点部分である。



②③④の部分の面積はそれぞれ

$$\left\{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{7}{4}$$

⑤⑥⑦の部分の面積はそれぞれ

$$\left\{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{3}{4}$$

であるから，求める面積は

$$\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}\right)\cdot 3 = \frac{15}{2}$$

となる。

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}\left(x(t),\ y(t)\right)$ を考える。

(1)　$-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3)　t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

(1) $-1 < t \leqq 1$ において

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

であり，$\dfrac{2}{1+t}$ は t について単調減少する関数である。

よって

$-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する。

(2) $-1 \leqq t \leqq 1$ のとき $1+t \geqq 0$ であるから

$$f(t) = \sqrt{\left\{x(t)\right\}^2 + \left\{y(t)\right\}^2}$$

$$= \sqrt{(1+t)^2(1+t) + 9(1+t)^2(1-t)}$$

$$= (1+t)\sqrt{10-8t}$$

である。

このとき

$$f'(t)=\sqrt{10-8t}+(1+t)\cdot\frac{1}{2}\cdot(10-8t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-8)$$

$$=\frac{(10-8t)-4(1+t)}{\sqrt{10-8t}}$$

$$=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$$

よって，$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は下表に従う。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

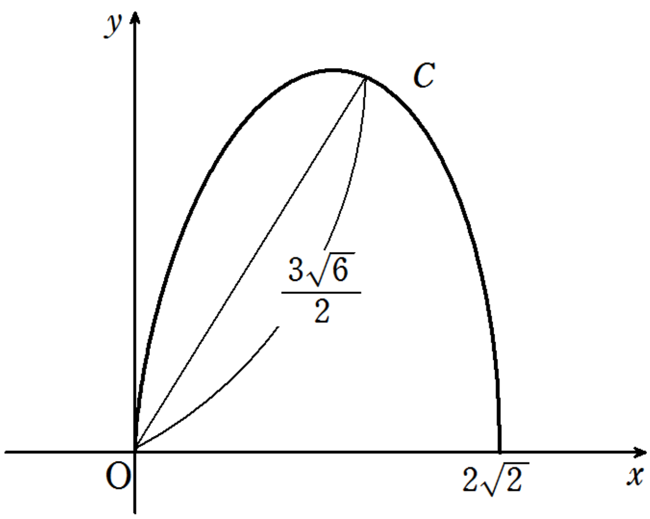
したがって，求める最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

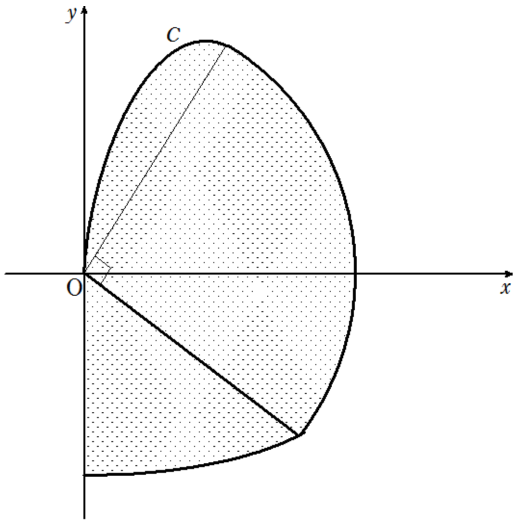
(3) $-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$ は 0 から $2\sqrt{2}$ まで単調に増加し，$y(-1)=y(1)=0$ である。

また，(1)より $-1<t\leqq 1$ において線分 OP の傾きが単調に減少する。

さらに，(2)より C の概形は次の図のようになる。



このとき D が通過する領域は次の図の打点部分になる。



求める領域の面積を S とすると

$S=$（半径 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ の四分円の面積）＋（C と x 軸とで囲まれる領域の面積）

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}+\int_0^{2\sqrt{2}}y\,dx$$

$$=\frac{27}{8}\pi+\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt$$

ここで，第 2 項の積分について

$$\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{9}{2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt\right)\quad\cdots（＊）$$

（＊）の（　）内の第 1 項の積分について $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=$（半径 1 の半円の面積）$=\dfrac{\pi}{2}$

（＊）の（　）内の第 2 項の積分について 被積分関数が奇関数であるから 0

となるので，

$$\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$$

よって

$$S=\frac{27}{8}\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{45}{8}\pi$$

$n,\ k$ を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,\,k}$ とおく。例えば

$$a_{4,\,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,\,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,\,1}x + a_{n,\,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,\,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}$ を $n,\ k$ で表せ。

---

(1) $\left(2^0 + 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1}\right)\left(2^0 + 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1}\right) = \left(2^0 \cdot 2^0 + 2^1 \cdot 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}\right) + 2a_{n,2}$

であるから

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^m\right)^2 = \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2 + 2a_{n,2}$$ と表せる。

よって

$$a_{n,2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^m\right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} 4 \cdot 4^{m-1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(2^n - 1\right)^2 - \frac{1-4^n}{1-4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(2^n - 1\right)^2 - \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right)\left\{\left(2^n - 1\right) - \frac{1}{3}\left(2^n + 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right)\left\{\frac{2}{3}\left(2^n - 2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)\left(2^n - 2\right)$$

（2）n 個の単項式 $2^m x$（$m=0,1,2,\cdots,n-1$）から異なる k 個を選んでそれらの積をとり，k 個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の単項式の和は $a_{n,k}x^k$ であるから

$$f_n(x)=\left(1+2^0x\right)\left(1+2^1x\right)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)$$

よって

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)\left(1+2^nx\right)}{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)}=1+2^nx \quad \cdots①$$

また

$$f_n(2x)=(1+2x)\left(1+2^2x\right)\left(1+2^3x\right)\cdots\left(1+2^nx\right)=\frac{f_{n+1}(x)}{1+x} \quad \cdots②$$

であるから

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$$

（3）①より　$f_{n+1}(x)=\left(1+2^nx\right)f_n(x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(1+2^nx\right)\left(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n\right) \quad \cdots①'$$

②より　$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=(1+x)\left\{1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,n}(2x)^n\right\} \quad \cdots②'$$

①′の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$　$\cdots③$

②′の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}$　$\cdots④$

③，④から $a_{n,k+1}$ の項を消去すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}\left(a_{n+1,k+1}-2^na_{n,k}\right)+2^ka_{n,k}$

よって

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k\left(2^{n+1}-1\right)}{2^{k+1}-1}$$

[東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{5}$]

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

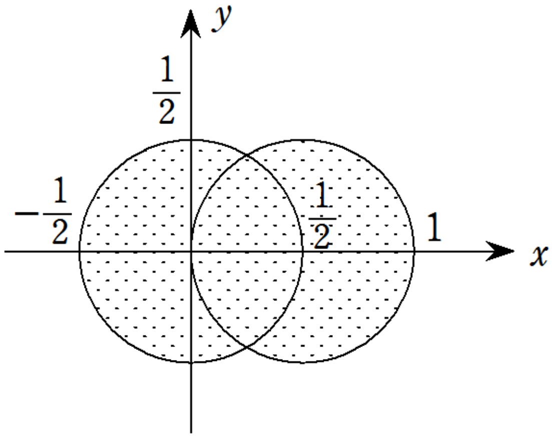
(1)　点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。

平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

(1) 直円錐 S および斜円錐 T を底面の円と平行な平面 $z=1$ で切ると円およびその内部になり，z 座標から相似比を考えるといずれも半径は $\dfrac{1}{2}$ である。

S の切り口の中心は $(0,\ 0,\ 1)$，T の切り口の中心は線分 OA と平面 $z=1$ の交点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ であることから，平面 $z=1$ による S および T の切り口を同一平面上に図示すると次の図のようになる。



(2) 点 P が S を動くとき線分 AP が通過する部分を K とする。

K を平面 $z=t$（$0\leqq t\leqq 2$）で切ったときの断面を考える。

u を $0\leqq u\leqq t$ を満たす実数として，点 P が S と平面 $z=u$ の交わりの図形上を動くとき，

線分 AP と平面 $z=t$ との交点を Q とすると，z 座標の差の比から

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{QA}:\mathrm{PA}=(t-u):(2-u):(2-u)$$

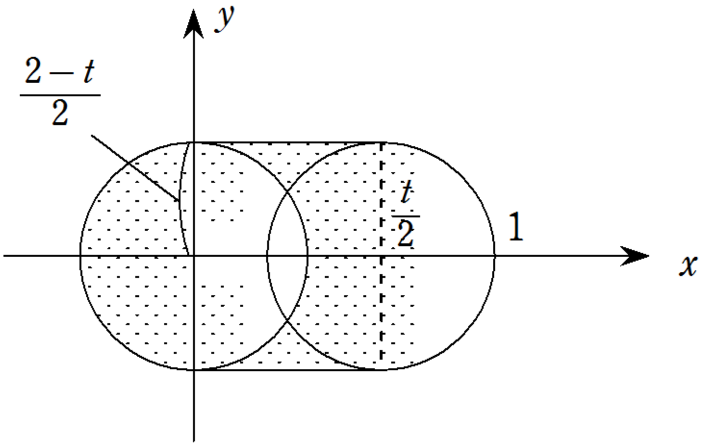
であるから，(1)と同様に考えて，平面 $z=t$ 上で点 Q が描く図形は円およびその内部であり，

中心の x 座標は　$1\cdot\dfrac{t-u}{2-u}=1-\dfrac{2-t}{2-u}$

半径は　$1\cdot\dfrac{2-u}{2}\cdot\dfrac{2-t}{2-u}=\dfrac{2-t}{2}$

である。

u を $0\leqq u\leqq t$ の範囲で動かすことにより，図形 K の平面 $z=t$ による切り口は次の図のようになる。



この断面積を $U(t)$ とすると

$$U(t)=\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)=\frac{\pi}{4}(t-2)^2-\frac{1}{2}t^2+t$$

であるから，線分 AP が通過する部分の体積 V は

$$V=\int_0^2 U(t)dt=\left[\frac{\pi}{12}(t-2)^3-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

である。

[東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{6}$]

以下の問いに答えよ。

(1)　A, α を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$$

を考える。$A>1$ のとき, この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ。

(2)　座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また, $0<r<1$ を満たす実数 r に対して, 不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r ($0<r<1$) が存在することを示せ。また, そのような r の最大値を求めよ。

条件 : C 上の点 Q で, Q における点 C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

(1)　$f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ とおく。

$f(\theta)$ は周期 2π であるから, $\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{9}{4}\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せばよい。

$A>1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) \geqq A-1>0, \quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right) \leqq -A+1<0$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = A - \sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right) \geqq A-1>0, \quad f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{7}{4}\pi+\alpha\right) \leqq -A+1<0$$

$$f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

であるから,

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi < \theta < \frac{9}{4}\pi$ のぞれぞれの区間に 1 個以上の解をもつ。

よって, 合計 4 個以上の解をもつ。

（2） D 内の点Pが $2x^2+y^2=t^2$ （ $0\leqq t<r$ ）を満たすとすると

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\cos\alpha,\ t\sin\alpha\right)$$

とおける。

C 上の点 $\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

であり，その法線ベクトルの 1 つとして $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)$ …① がとれる。

接線とPQが垂直であるとき，①と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\sqrt{2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}t\cos\alpha,\ \sin\theta-t\sin\alpha\right)$ は平行で，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\theta\left(\sin\theta-t\sin\alpha\right)-\sin\theta\left(2\cos\theta-t\cos\alpha\right)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -\sin\theta\cos\theta+t\left(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin 2\theta-t\sin\left(\theta-\alpha\right)=0 \quad \cdots②$$

となる。

以下，②を満たす θ （ $0\leqq\theta<2\pi$ ）が 4 個以上存在するかどうかを考える。

$t=0$ のとき，②は $\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$ という 4 個の解をもつので適する。

$t>0$ のとき，②は $\frac{1}{2t}\sin 2\theta-t\sin\left(\theta-\alpha\right)=0$ となり，

$\frac{1}{2t}>1$ つまり $0<t<\frac{1}{2}$ ならば(1)より少なくとも 4 個の解が存在する。

したがって， $r=\frac{1}{2}$ とすることで条件を満たすことがわかる。

次に， $r=\frac{1}{2}$ が最大値であることを示す。

②で $t=\frac{1}{2}$， $\alpha=\frac{\pi}{4}$ とした方程式

$$\sin 2\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots③$$

が 3 個の解しかもたないことを示す。

③の解は整数$a,\ b$を用いて

$$\theta-\frac{\pi}{4}=2\theta+2a\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta=-\frac{\pi}{4}-2a\pi \quad \cdots④$$

または

$$\theta-\frac{\pi}{4}=\pi-2\theta+2b\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta=\left(\frac{2}{3}b+\frac{5}{12}\right)\pi \quad \cdots⑤$$

と表される。

$0≦\theta<2\pi$ を満たすものは，$a=-1$，$b=0,1,2$ としたものであり，

$$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

の 3 個である。

以上により，$r>\dfrac{1}{2}$ とすると条件を満たさないので，

求めるrの最大値は $r=\dfrac{1}{2}$