［ 東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

以下の問いに答えよ。

(1)　$A,\ \alpha$ を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$$

を考える。$A>1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ。

(2)　座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また，$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r（$0<r<1$）が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における点 C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

(1)　$f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$　とおく。

$f(\theta)$ は周期 2π であるから，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{9}{4}\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せばよい。

$A>1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) \geqq A-1>0,\quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right) \leqq -A+1<0$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = A - \sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right) \geqq A-1>0,\quad f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{7}{4}\pi+\alpha\right) \leqq -A+1<0$$

$$f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

であるから，

$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi < \theta < \dfrac{9}{4}\pi$ のぞれぞれの区間に 1 個以上の解をもつ。

よって，合計 4 個以上の解をもつ。

（2） D 内の点 P が $2x^2+y^2=t^2$ （$0 \leqq t < r$ ）を満たすとすると

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\cos\alpha,\ t\sin\alpha\right)$$

とおける。

C 上の点 $\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

であり，その法線ベクトルの 1 つとして $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)$ …① がとれる。

接線と PQ が垂直であるとき，①と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\sqrt{2}\cos\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\cos\alpha,\ \sin\theta-t\sin\alpha\right)$ は平行で，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\theta\left(\sin\theta-t\sin\alpha\right)-\sin\theta\left(2\cos\theta-t\cos\alpha\right)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -\sin\theta\cos\theta+t\left(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin 2\theta-t\sin\left(\theta-\alpha\right)=0 \quad \cdots②$$

となる。

以下，②を満たす θ（$0 \leqq \theta < 2\pi$ ）が 4 個以上存在するかどうかを考える。

$t=0$ のとき，②は $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ という 4 個の解をもつので適する。

$t>0$ のとき，②は $\dfrac{1}{2t}\sin 2\theta-t\sin\left(\theta-\alpha\right)=0$ となり，

$\dfrac{1}{2t}>1$ つまり $0<t<\dfrac{1}{2}$ ならば(1)より少なくとも 4 個の解が存在する。

したがって， $r=\dfrac{1}{2}$ とすることで条件を満たすことがわかる。

次に， $r=\dfrac{1}{2}$ が最大値であることを示す。

②で $t=\dfrac{1}{2}$， $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ とした方程式

$$\sin 2\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots③$$

が 3 個の解しかもたないことを示す。

③の解は整数a, bを用いて

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 2\theta + 2a\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4} - 2a\pi \quad \cdots④$$

または

$$\theta - \frac{\pi}{4} = \pi - 2\theta + 2b\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \left(\frac{2}{3}b + \frac{5}{12}\right)\pi \quad \cdots⑤$$

と表される。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすものは，$a = -1$，$b = 0, 1, 2$としたものであり，

$$\theta = \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

の3個である。

以上により，$r > \dfrac{1}{2}$とすると条件を満たさないので，

求めるrの最大値は $r = \dfrac{1}{2}$