[東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{5}$]

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1, 0, 2)$ を考える。

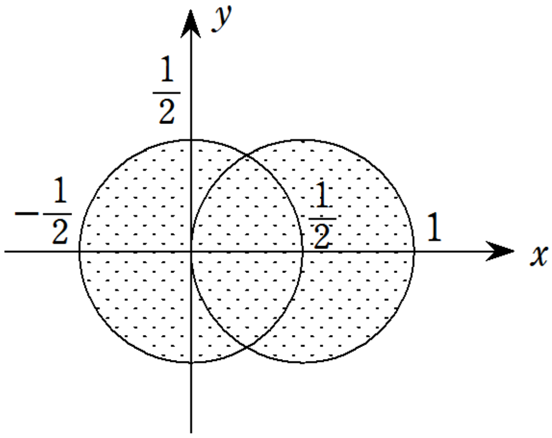
(1)　点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。

平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

(1) 直円錐 S および斜円錐 T を底面の円と平行な平面 $z=1$ で切ると円およびその内部になり，z 座標から相似比を考えるといずれも半径は $\frac{1}{2}$ である。

S の切り口の中心は $(0, 0, 1)$，T の切り口の中心は線分 OA と平面 $z=1$ の交点 $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ であることから，平面 $z=1$ による S および T の切り口を同一平面上に図示すると次の図のようになる。



(2) 点 P が S を動くとき線分 AP が通過する部分を K とする。

K を平面 $z=t$ （$0 \leqq t \leqq 2$）で切ったときの断面を考える。

u を $0 \leqq u \leqq t$ を満たす実数として，点 P が S と平面 $z=u$ の交わりの図形上を動くとき，線分 AP と平面 $z=t$ との交点を Q とすると，z 座標の差の比から

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{QA}:\mathrm{PA}=(t-u):(2-u):(2-u)$$

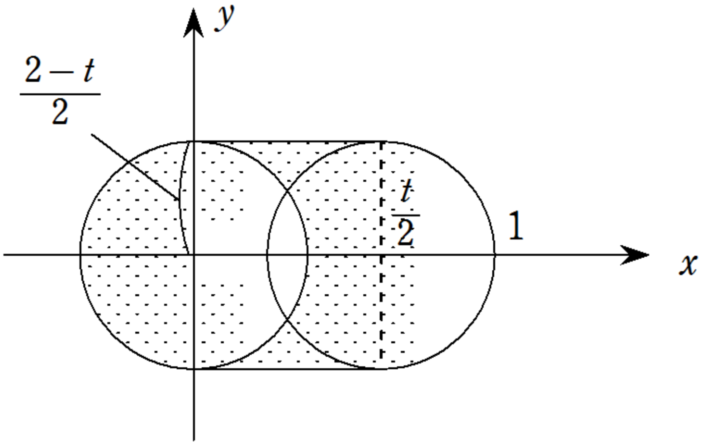
であるから，(1)と同様に考えて，平面 $z=t$ 上で点 Q が描く図形は円およびその内部であり，

中心のx座標は　$1\cdot\dfrac{t-u}{2-u}=1-\dfrac{2-t}{2-u}$

半径は　$1\cdot\dfrac{2-u}{2}\cdot\dfrac{2-t}{2-u}=\dfrac{2-t}{2}$

である。

uを$0\leqq u\leqq t$の範囲で動かすことにより，図形Kの平面$z=t$による切り口は次の図のようになる。



この断面積を$U(t)$とすると

$$U(t)=\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)=\frac{\pi}{4}(t-2)^2-\frac{1}{2}t^2+t$$

であるから，線分 AP が通過する部分の体積Vは

$$V=\int_0^2 U(t)dt=\left[\frac{\pi}{12}(t-2)^3-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

である。