



$n, k$  を  $1 \leq k \leq n$  を満たす整数とする。  $n$  個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる  $k$  個を選んでそれらの積をとる。  $k$  個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとる

ことにより得られる  ${}_n C_k$  個の整数の和を  $a_{n,k}$  とおく。例えば

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数  $n$  に対し、  $a_{n,2}$  を求めよ。

(2) 1 以上の整数  $n$  に対し、  $x$  についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \dots + a_{n,n}x^n$$

を考える。  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$  と  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$  を  $x$  についての整式として表せ。

(3)  $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$  を  $n, k$  で表せ。



(1)  $(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1})(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) = (2^0 \cdot 2^0 + 2^1 \cdot 2^1 + \dots + 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}) + 2a_{n,2}$

であるから

$$\left( \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \right)^2 = \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2 + 2a_{n,2} \quad \text{と表せる。}$$

よって

$$\begin{aligned} a_{n,2} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1-2^n}{1-2} \right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} 4 \cdot 4^{m-1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (2^n - 1)^2 - \frac{1-4^n}{1-4} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (2^n - 1)^2 - \frac{1}{3}(4^n - 1) \right\} = \frac{1}{2}(2^n - 1) \left\{ (2^n - 1) - \frac{1}{3}(2^n + 1) \right\} = \frac{1}{2}(2^n - 1) \left\{ \frac{2}{3}(2^n - 2) \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2^n - 1)(2^n - 2) \end{aligned}$$

(2)  $n$  個の単項式  $2^m x$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) から異なる  $k$  個を選んでそれらの積をとり,  $k$  個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる  ${}_n C_k$  個の単項式の和は  $a_{n,k} x^k$  であるから

$$f_n(x) = (1+2^0 x)(1+2^1 x)(1+2^2 x) \cdots (1+2^{n-1} x)$$

よって

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(1+x)(1+2x)(1+2^2 x) \cdots (1+2^{n-1} x)(1+2^n x)}{(1+x)(1+2x)(1+2^2 x) \cdots (1+2^{n-1} x)} = 1+2^n x \quad \cdots \textcircled{1}$$

また

$$f_n(2x) = (1+2x)(1+2^2 x)(1+2^3 x) \cdots (1+2^n x) = \frac{f_{n+1}(x)}{1+x} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1+x$$

(3) ①より  $f_{n+1}(x) = (1+2^n x)f_n(x)$  であるから

$$\begin{aligned} & 1 + a_{n+1,1}x + \cdots + a_{n+1,k}x^k + a_{n+1,k+1}x^{k+1} + \cdots + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \\ &= (1+2^n x)(1 + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,k}x^k + a_{n,k+1}x^{k+1} + \cdots + a_{n,n}x^n) \quad \cdots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

②より  $f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x)$  であるから

$$\begin{aligned} & 1 + a_{n+1,1}x + \cdots + a_{n+1,k}x^k + a_{n+1,k+1}x^{k+1} + \cdots + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \\ &= (1+x)\{1 + a_{n,1}(2x) + \cdots + a_{n,k}(2x)^k + a_{n,k+1}(2x)^{k+1} + \cdots + a_{n,n}(2x)^n\} \quad \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

①' の両辺の  $x^{k+1}$  の係数を比較すると  $a_{n+1,k+1} = a_{n,k+1} + 2^n a_{n,k} \quad \cdots \textcircled{3}$

②' の両辺の  $x^{k+1}$  の係数を比較すると  $a_{n+1,k+1} = 2^{k+1} a_{n,k+1} + 2^k a_{n,k} \quad \cdots \textcircled{4}$

③, ④から  $a_{n,k+1}$  の項を消去すると  $a_{n+1,k+1} = 2^{k+1}(a_{n+1,k+1} - 2^n a_{n,k}) + 2^k a_{n,k}$

よって

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^k(2^{n+1} - 1)}{2^{k+1} - 1}$$