[東京大学 2020年前期 理科 $\boxed{3}$]

★────────────────────★

$-1 \leqq t \leqq 1$を満たす実数tに対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点$\mathrm{P}\left(x(t),\ y(t)\right)$を考える。

(1)　$-1 < t \leqq 1$におけるtの関数$\dfrac{y(t)}{x(t)}$は単調に減少することを示せ。

(2)　原点とPの距離を$f(t)$とする。$-1 \leqq t \leqq 1$におけるtの関数$f(t)$の増減を調べ，

最大値を求めよ。

(3)　tが$-1 \leqq t \leqq 1$を動くときのPの軌跡をCとし，Cとx軸で囲まれた領域をDとする。

原点を中心としてDを時計回りに90°回転させるとき，Dが通過する領域の面積を求めよ。

★────────────────────★

(1) $-1 < t \leqq 1$において

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

であり，$\dfrac{2}{1+t}$はtについて単調減少する関数である。

よって

$-1 < t \leqq 1$におけるtの関数$\dfrac{y(t)}{x(t)}$は単調に減少する。

(2) $-1 \leqq t \leqq 1$のとき $1+t \geqq 0$であるから

$$f(t) = \sqrt{\left\{x(t)\right\}^2 + \left\{y(t)\right\}^2}$$

$$= \sqrt{(1+t)^2(1+t) + 9(1+t)^2(1-t)}$$

$$= (1+t)\sqrt{10-8t}$$

である。

このとき

$$f'(t)=\sqrt{10-8t}+(1+t)\cdot\frac{1}{2}\cdot(10-8t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-8)$$

$$=\frac{(10-8t)-4(1+t)}{\sqrt{10-8t}}$$

$$=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$$

よって，$-1\leqq t\leqq 1$における $f(t)$の増減は下表に従う。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

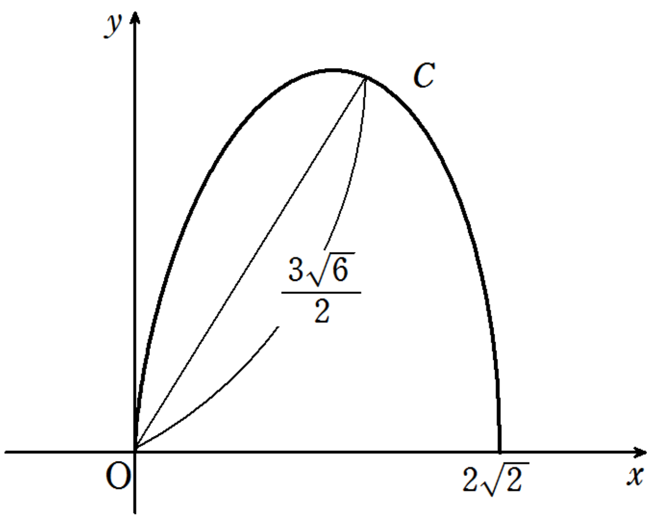
したがって，求める最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

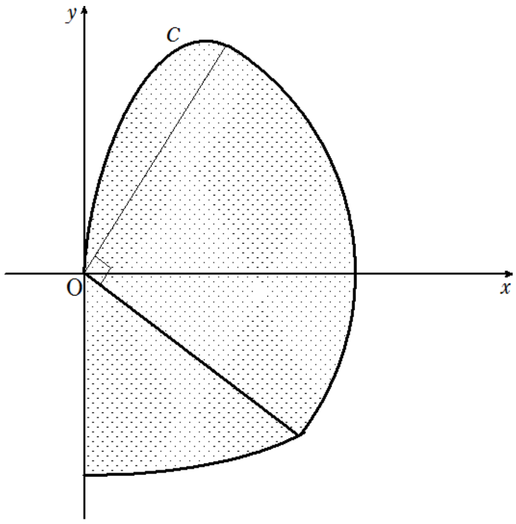
(3)　$-1\leqq t\leqq 1$のとき，$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$ は 0 から $2\sqrt{2}$ まで単調に増加し，$y(-1)=y(1)=0$ である。

また，(1)より $-1<t\leqq 1$において線分 OP の傾きが単調に減少する。

さらに，(2)より C の概形は次の図のようになる。



このときDが通過する領域は次の図の打点部分になる。



求める領域の面積をSとすると

$$S=（半径\frac{3\sqrt{6}}{2}の四分円の面積）＋（Cとx軸とで囲まれる領域の面積）$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}+\int_0^{2\sqrt{2}}y\,dx$$

$$=\frac{27}{8}\pi+\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt$$

ここで，第 2 項の積分について

$$\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{9}{2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt\right)\quad\cdots（＊）$$

（＊）の（　）内の第 1 項の積分について $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=$（半径 1 の半円の面積）$=\frac{\pi}{2}$

（＊）の（　）内の第 2 項の積分について 被積分関数が奇関数であるから 0

となるので，

$$\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$$

よって

$$S=\frac{27}{8}\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{45}{8}\pi$$