[東京大学 2020 年前期 理科 $\boxed{2}$]

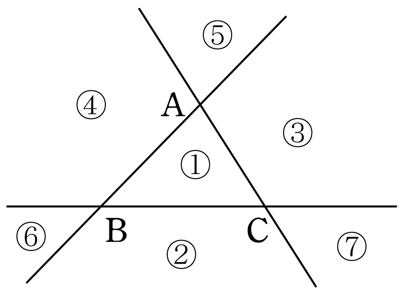
平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を△PQR で表す。また， P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leqq 3$$

を満たしながら動くとき， X の動きうる範囲の面積を求めよ。

直線 AB, BC, CA で平面を図のような 7 つの領域に分ける。



$S = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX$ とおく。

(ｉ) X が①にあるとき

$S = \triangle ABC = 1$ となるので不適。

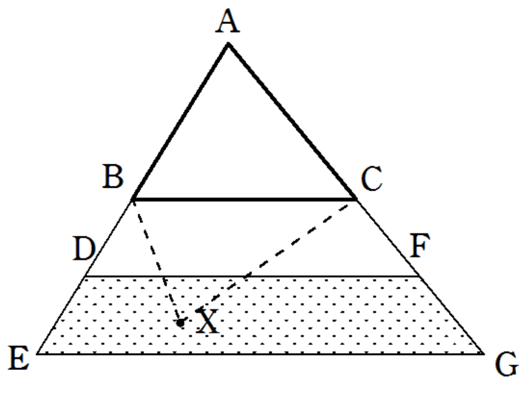
(ⅱ) X が②にあるとき

$S = 2\triangle BCX + \triangle ABC = 2\triangle BCX + 1$

より $2 \leqq S \leqq 3$ となるのは $\dfrac{1}{2} \leqq \triangle BCX \leqq 1$ のときである。

BC を底辺としたときの△ABC との高さの比を考えて，次の図のような台形 DEFG の周と内部を動く。$AB : BD : DE = 2 : 1 : 1$ である。

X が③④にあるときも同様である。



（iii）X が⑤にあるとき

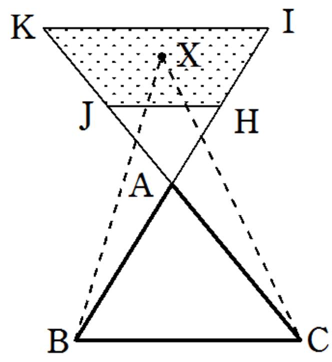
$S=2\triangle \mathrm{BCX}-\triangle \mathrm{ABC}=2\triangle \mathrm{BCX}-1$

より $2 \leqq S \leqq 3$ となるのは $\dfrac{3}{2} \leqq \triangle \mathrm{BCX} \leqq 2$ のときである。

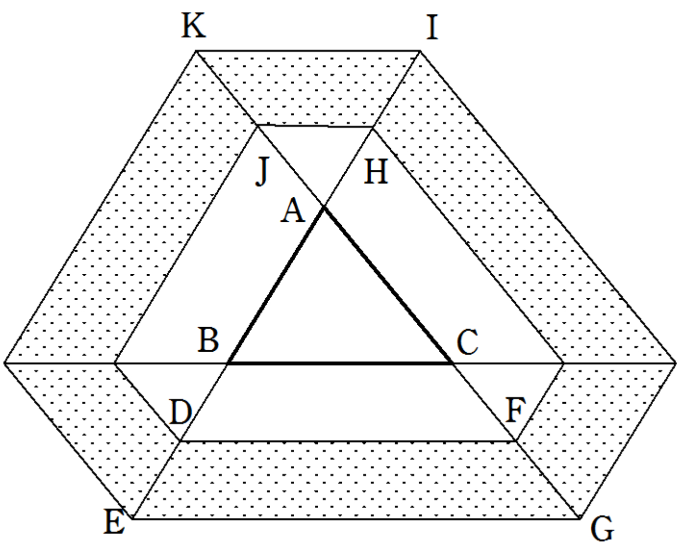
BC を底辺としたときの△ABC との高さの比を考えて，次の図のような

台形 HIKJ の周と内部を動く。$\mathrm{BA}:\mathrm{AH}:\mathrm{HI}=\mathrm{CA}:\mathrm{AJ}:\mathrm{JK}=2:1:1$である。

X が⑥⑦にあるときも同様である。



(ｉ)(ⅱ)(ⅲ)より，求める領域は次の図の打点部分である。



②③④の部分の面積はそれぞれ

$$\left\{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\triangle \mathrm{ABC}=\frac{7}{4}$$

⑤⑥⑦の部分の面積はそれぞれ

$$\left\{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\triangle \mathrm{ABC}=\frac{3}{4}$$

であるから，求める面積は

$$\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot 3=\frac{15}{2}$$

となる。