



a, b, c, p を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$bx^2 + cx + a > 0$$

$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と、 $x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

- (1) a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。
- (2) a, b, c のうち、少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。
- (3) $p = 0$ であることを示せ。



- (1) $ax^2 + bx + c > 0 \cdots \textcircled{1}$, $bx^2 + cx + a > 0 \cdots \textcircled{2}$, $cx^2 + ax + b > 0 \cdots \textcircled{3}$

をすべて満たす実数 x の集合と、 $x > p$ を満たす実数 x の集合が一致している $\cdots \textcircled{4}$

とする。

「 a, b, c はすべて 0 以上」を否定すると

「 a, b, c の少なくとも 1 つは 0 未満」となる。

$a < 0$ であると仮定する。

このとき、十分大きな x に対して $ax^2 + bx + c < 0$ となるので、 $\textcircled{4}$ に反する。

よって、 $a \geq 0$ である。 a, b, c は対等であり、

同様にして、 $b \geq 0, c \geq 0$ であるから、題意は示された。

- (2) $a > 0$ かつ $b > 0$ かつ $c > 0$ とする。

このとき、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (bx^2 + cx + a) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (cx^2 + ax + b) = \infty$

となるが、十分に絶対値の大きい負の実数 x について、

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ を満たすが、 $\textcircled{4}$ を満たさない。

よって、(1) の結果と合わせて題意は示された。

(3) (2)より a, b, c のうち少なくとも1つは0であるので, 0の個数で場合分けをする。

(i) a, b, c がすべて0のとき

$a = b = c = 0$ のときであり, ①②③をすべて満たす実数 x は存在しないため, 不適。

(ii) a, b, c のうち2つが0のとき

$a = b = 0, c > 0$ とすると, ①②③はそれぞれ

$$c > 0, cx > 0, cx^2 > 0$$

となるが,

$cx > 0 \Leftrightarrow x > 0$ であり, このとき①②③はすべて満たされ, $p = 0$ となる。

a, b, c は対等であるから, $b = c = 0, c = a = 0$ の場合にも $p = 0$ となる。

(iii) a, b, c のうち1つが0のとき

$a = 0, b > 0, c > 0$ とすると, ①②③はそれぞれ

$$bx + c > 0, x(bx + c) > 0, cx^2 + b > 0$$

となるが,

$bx + c > 0, x(bx + c) > 0$ より $x > 0$ であり, このとき①②③はすべて満たされ, $p = 0$ となる。

(i)(ii)(iii)より, $p = 0$ である。