[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$a>0,\ b>0$とする。座標平面上の曲線

$C:\ y=x^3-3ax^2+b$

が以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に x 座標と y 座標が

ともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

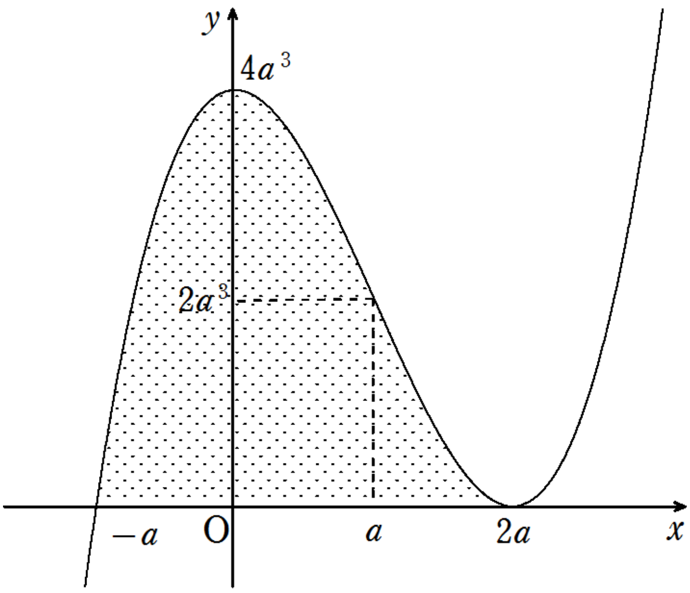
$f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおく。

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ より $f'(x)=0$ となる x は $x=0,\ 2a$

$f(0)=b>0$ であるから 条件 1 における接点の x 座標は $2a$

よって，$f(2a)=8a^3-12a^3+b=0 \iff b=4a^3$

このとき，x 軸と C で囲まれた領域は次の図の打点部分になる。ただし，境界は含まない。



x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶことにする。

$a \geqq 1$のとき，少なくとも 2 つの格子点$(0,1),\ (1,1)$が題意の領域に含まれてしまうので

$0<a<1$ …①

$0<a<1$のとき $0<2a^3<2$ であるから，ちょうど 1 個の格子点となるのは $(0, 1)$ である。

よって，$(0, 1)$ がちょうど 1 個の格子点となるために $1<4a^3 \leqq 2$ であることが必要である。

これを解くと $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$　…②

②は①を満たすので，②が求める a の範囲である。

したがって $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{2}$]

座標平面上に 8 本の直線

$x=a \quad (a=1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad y=b \quad (b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

がある。以下，16 個の点

$(a,\ b) \quad (a=1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

から異なる 5 点を選ぶことを考える。

(1)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

---

(1)（ i ）題意の 2 本の直線がともに x 軸に垂直であるとき

2 本の直線の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある。

選ばれた 2 本の直線が $x=1,\ x=2$ であるときを考える。

このとき，直線 $x=3,\ x=4$ 上の 8 点から題意を満たすように 5 点を選ぶ方法を考えると，

$y=1$ 上の 2 点を選び（この選び方は 4 通り），

他の 3 点は $(3,\ 2),\ (4,\ 2)$ から 1 点，$(3,\ 3),\ (4,\ 3)$ から 1 点，$(3,\ 4),\ (4,\ 4)$ から 1 点をそれぞれ

選ぶ（この選び方は 2^3 通り）とよい。

したがって，${}_4\mathrm{C}_2\cdot 4\cdot 2^3=192$ 通りある。

（ii）題意の 2 本の直線がともに y 軸に垂直であるとき

（ i)と同様に考えて 192 通り。

（iii）題意の 2 本の直線の一方が x 軸に垂直で，他方が y 軸に垂直であるとき

2 本の直線の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=4^2$ 通りある。

選ばれた 2 本の直線が $x=1,\ y=1$ であるときを考える。

このとき，直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$ かつ $y=2,\ y=3,\ y=4$ 上の 9 点から題意を満たすように

5 点を選ぶ方法を考える。

5 点が 6 本の直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$， $y=2,\ y=3,\ y=4$ のうちの 4 本以下の直線上に集まることはないので,

「9 点から 5 点を選ぶ場合（${}_9\mathrm{C}_5$ 通り）」から

「5 点が 6 本の直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$， $y=2,\ y=3,\ y=4$ のうちの 5 本の直線上にある 6 点に集まる場合」を除けばよく，直線の選び方が ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りあり，そのそれぞれに対して点の選び方が ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りあることを考えて

$$ {}_9\mathrm{C}_5 - {}_6\mathrm{C}_5 \cdot {}_6\mathrm{C}_5 = 126 - 36 = 90 \text{ 通り} $$

ある。よってこのとき， $4^2 \cdot 90 = 1440$ 通りある。

(ｉ)(ⅱ)(ⅲ)より，求める場合の数は

$192 + 192 + 1440 = 1824$ 通りある。

(2) 8 本の直線がいずれも選んだ点を少なくとも 1 個含むとき,

4 つの直線 $y=1,\ y=2,\ y=3,\ y=4$ 上のどれか 1 つの直線上には 2 点, 3 つの直線上には 1 点ある。

2 点ある直線の選び方は 4 通りある。

次に, 2 点ある直線が $y=1$ であるとする。$y=1$ 上の 4 点から 2 点を選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りある。

そして，2 点が $(1,\ 1),\ (2,\ 1)$ であるとし，残りの 3 点の選び方を考える。

$(3,\ 2),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 4)$ の 6 点から直線 $x=3,\ x=4$ 上のいずれかに偏らないように 3 点が選ばれる方法は次の（A）（B）の場合がある。

（A） $(3,\ 2),\ (4,\ 2)$ から 1 点， $(3,\ 3),\ (4,\ 3)$ から 1 点， $(4,\ 3),\ (4,\ 4)$ から 1 点をそれぞれ選ぶ場合（2^3 通り）から，3 点が $(3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4)$ または $(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)$ になる場合（2 通り）を除いて $2^3 - 2 = 6$ 通り。

（B） $(3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 3)$ から 1 点， $(4,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 4)$ から 1 点が y 座標が異なる 2 点として選ばれ（6 通り），残りの 1 点が $x=1,\ x=2$ 上のさらに前述の 2 点と y 座標が異なる 2 点から選ばれる（2 通り）場合より $6 \cdot 2 = 12$ 通り。

よって（A）（B）より $6 + 12 = 18$ 通り。

したがって，求める場合の数は $4 \cdot 6 \cdot 18 = 432$ 通りある。

[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{3}$]

O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$\ell : y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と ℓ 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ とおく。

$f(x) = (x-1)^2 + 3$，$f'(x) = 2(x-1)$ である。

$y = f(x)$ 上の $\mathrm{T}(t,\ f(t))$（$t \geqq 0$）における C の接線 m の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x-t) \iff y - (t^2 - 2t + 4) = 2(t-1)(x-t)$$

$$\iff y = 2(t-1)x - t^2 + 4$$

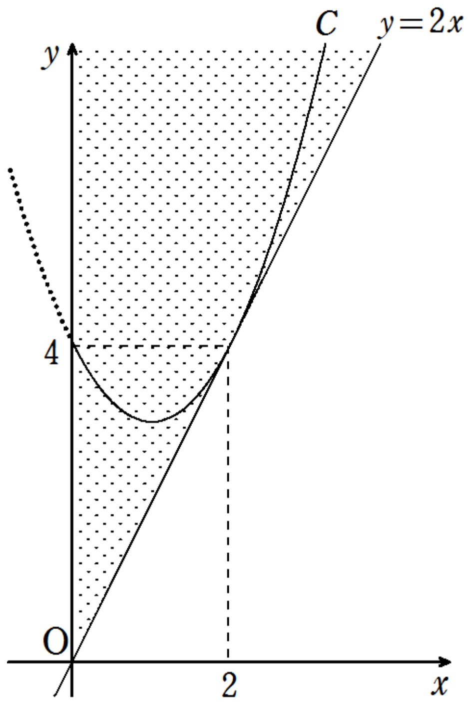
これが原点 O を通るとき　$0 = -t^2 + 4 \iff t^2 = 4$

$t \geqq 0$ より　$t = 2$

よってこのとき，$\mathrm{T}(2, 4)$，$m : y = 2x$ である。

したがって，求める領域を図示すると

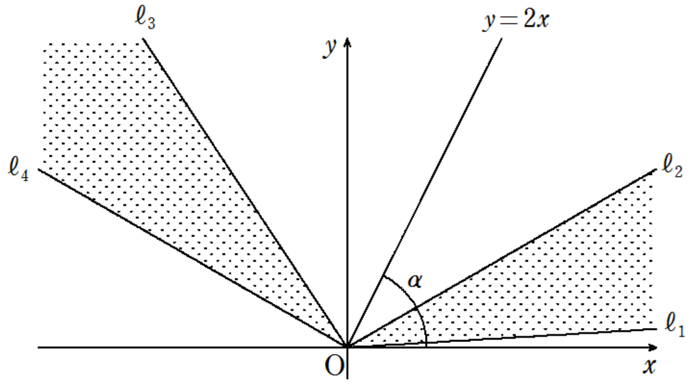
右の図の打点部分である。ただし，境界を含む。



(2) 3点O, A, Bが正三角形となるとき，

「$\angle AOB = 60^\circ$ かつ $OA = OB$」を満たすようにBをとることになるので，

半直線OBは(1)で答えた領域をOのまわりに60°および-60°回転させた次の図の打点部分を動く。



図のℓ_2，ℓ_4の傾きはそれぞれ $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

α を $\tan\alpha = 2$ を満たす鋭角とすると

ℓ_1の傾きについて

$$\tan\left(\alpha - 60^\circ\right) = \frac{\tan\alpha - \tan 60^\circ}{1 + \tan\alpha \tan 60^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\cdot\sqrt{3}} = \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$

ℓ_3の傾きについて

$$\tan\left(\alpha + 60^\circ\right) = \frac{\tan\alpha + \tan 60^\circ}{1 - \tan\alpha \tan 60^\circ} = \frac{2+\sqrt{3}}{1-2\cdot\sqrt{3}} = \frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$$

よって，求めるaの範囲は

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$n,\ k$ を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとる

ことにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,\,k}$ とおく。例えば

$$a_{4,\,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,\,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,\,1}x + a_{n,\,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,\,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}$ を $n,\ k$ で表せ。

---

(1) $\left(2^0 + 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1}\right)\left(2^0 + 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1}\right) = \left(2^0 \cdot 2^0 + 2^1 \cdot 2^1 + \cdots\cdots + 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}\right) + 2a_{n,2}$

であるから

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^m\right)^2 = \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2 + 2a_{n,2}$$ と表せる。

よって

$$a_{n,2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^m\right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} (2^m)^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)^2 - \sum_{m=0}^{n-1} 4 \cdot 4^{m-1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(2^n - 1\right)^2 - \frac{1-4^n}{1-4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(2^n - 1\right)^2 - \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right)\left\{\left(2^n - 1\right) - \frac{1}{3}\left(2^n + 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right)\left\{\frac{2}{3}\left(2^n - 2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)\left(2^n - 2\right)$$

(2) n 個の単項式 $2^m x$（$m=0, 1, 2, \cdots, n-1$）から異なる k 個を選んでそれらの積をとり，k 個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の単項式の和は $a_{n,k}x^k$ であるから

$$f_n(x)=\left(1+2^0 x\right)\left(1+2^1 x\right)\left(1+2^2 x\right)\cdots\left(1+2^{n-1} x\right)$$

よって

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2 x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)\left(1+2^n x\right)}{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2 x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)}=1+2^n x \quad \cdots①$$

また

$$f_n(2x)=(1+2x)\left(1+2^2 x\right)\left(1+2^3 x\right)\cdots\left(1+2^n x\right)=\frac{f_{n+1}(x)}{1+x} \quad \cdots②$$

であるから

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$$

(3) ①より　$f_{n+1}(x)=\left(1+2^n x\right)f_n(x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(1+2^n x\right)\left(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n\right) \quad \cdots①'$$

②より　$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=(1+x)\left\{1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,n}(2x)^n\right\} \quad \cdots②'$$

①′ の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^n a_{n,k} \quad \cdots③$

②′ の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^k a_{n,k} \quad \cdots④$

③，④から $a_{n,k+1}$ の項を消去すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}\left(a_{n+1,k+1}-2^n a_{n,k}\right)+2^k a_{n,k}$

よって

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k\left(2^{n+1}-1\right)}{2^{k+1}-1}$$