[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{4}$]

$n,\ k$ を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$2^m \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとる

ことにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,\,k}$ とおく。例えば

$$a_{4,\,3}=2^0\cdot2^1\cdot2^2+2^0\cdot2^1\cdot2^3+2^0\cdot2^2\cdot2^3+2^1\cdot2^2\cdot2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し, $a_{n,\,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し, x についての整式

$$f_n(x)=1+a_{n,\,1}x+a_{n,\,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,\,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}$ を $n,\ k$ で表せ。

---

(1) $\left(2^0+2^1+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)\left(2^0+2^1+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)=\left(2^0\cdot2^0+2^1\cdot2^1+\cdots\cdots+2^{n-1}\cdot2^{n-1}\right)+2a_{n,2}$

であるから

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2=\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2+2a_{n,2}$$ と表せる。

よって

$$a_{n,2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}4\cdot4^{m-1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(2^n-1\right)^2-\frac{1-4^n}{1-4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2^n-1\right)^2-\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(2^n-1\right)\left\{\left(2^n-1\right)-\frac{1}{3}\left(2^n+1\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(2^n-1\right)\left\{\frac{2}{3}\left(2^n-2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)$$

(2) n 個の単項式 $2^m x$（$m=0,1,2,\cdots,n-1$）から異なる k 個を選んでそれらの積をとり，k 個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の単項式の和は $a_{n,k}x^k$ であるから

$$f_n(x)=\left(1+2^0x\right)\left(1+2^1x\right)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)$$

よって

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)\left(1+2^nx\right)}{(1+x)(1+2x)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)}=1+2^nx \quad \cdots①$$

また

$$f_n(2x)=(1+2x)\left(1+2^2x\right)\left(1+2^3x\right)\cdots\left(1+2^nx\right)=\frac{f_{n+1}(x)}{1+x} \quad \cdots②$$

であるから

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$$

(3) ①より　$f_{n+1}(x)=\left(1+2^nx\right)f_n(x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(1+2^nx\right)\left(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n\right) \quad \cdots①'$$

②より　$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$　であるから

$$1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k}x^k+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$=(1+x)\left\{1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,n}(2x)^n\right\} \quad \cdots②'$$

①′の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k} \quad \cdots③$

②′の両辺の x^{k+1} の係数を比較すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k} \quad \cdots④$

③，④から $a_{n,k+1}$ の項を消去すると　$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}\left(a_{n+1,k+1}-2^na_{n,k}\right)+2^ka_{n,k}$

よって

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k\left(2^{n+1}-1\right)}{2^{k+1}-1}$$