[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{3}$]

Oを原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点Pが C 上を動くとき，Oを端点とする半直線OPが通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$\ell : y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点Aと ℓ 上の点Bで，3点O, A, Bが正三角形の3頂点となるものがある。

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ とおく。

$f(x) = (x-1)^2 + 3$，$f'(x) = 2(x-1)$ である。

$y = f(x)$ 上の $\mathrm{T}(t,\ f(t))$（$t \geqq 0$）における C の接線 m の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x-t) \iff y - (t^2 - 2t + 4) = 2(t-1)(x-t)$$

$$\iff y = 2(t-1)x - t^2 + 4$$

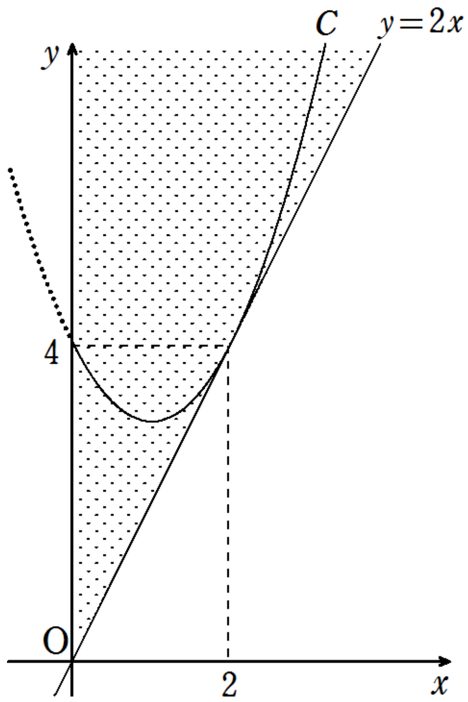
これが原点Oを通るとき　$0 = -t^2 + 4 \iff t^2 = 4$

$t \geqq 0$ より　$t = 2$

よってこのとき，$\mathrm{T}(2, 4)$，$m : y = 2x$ である。

したがって，求める領域を図示すると

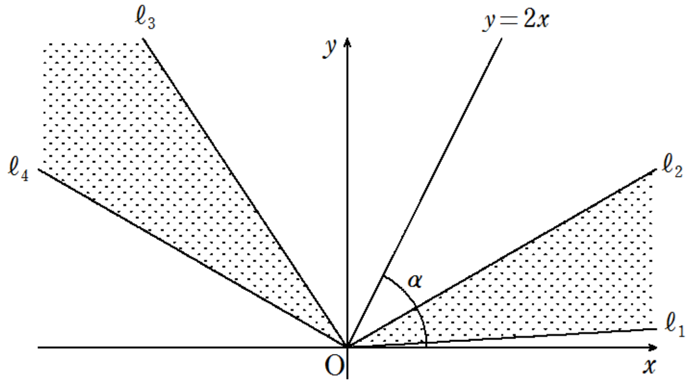
右の図の打点部分である。ただし，境界を含む。



(2) 3点O, A, Bが正三角形となるとき,

「$\angle AOB = 60^\circ$ かつ $OA = OB$」を満たすようにBをとることになるので,

半直線OBは(1)で答えた領域をOのまわりに60°および-60°回転させた次の図の打点部分を動く。



図のℓ_2, ℓ_4の傾きはそれぞれ $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

αを$\tan\alpha = 2$を満たす鋭角とすると

ℓ_1の傾きについて

$$\tan\left(\alpha - 60^\circ\right) = \frac{\tan\alpha - \tan 60^\circ}{1 + \tan\alpha \tan 60^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\cdot\sqrt{3}} = \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$

ℓ_3の傾きについて

$$\tan\left(\alpha + 60^\circ\right) = \frac{\tan\alpha + \tan 60^\circ}{1 - \tan\alpha \tan 60^\circ} = \frac{2+\sqrt{3}}{1-2\cdot\sqrt{3}} = \frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$$

よって,求めるaの範囲は

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$