［ 東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

座標平面上に 8 本の直線

$x=a\quad(a=1, 2, 3, 4),\qquad y=b\quad(b=1, 2, 3, 4)$

がある。以下，16 個の点

$(a, b)\quad(a=1, 2, 3, 4,\quad b=1, 2, 3, 4)$

から異なる 5 点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

(1)（ i ）題意の 2 本の直線がともに x 軸に垂直であるとき

2 本の直線の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある。

選ばれた 2 本の直線が $x=1,\ x=2$ であるときを考える。

このとき，直線 $x=3,\ x=4$ 上の 8 点から題意を満たすように 5 点を選ぶ方法を考えると，

$y=1$ 上の 2 点を選び（この選び方は 4 通り），

他の 3 点は $(3, 2), (4, 2)$ から 1 点，$(3, 3), (4, 3)$ から 1 点，$(3, 4), (4, 4)$ から 1 点をそれぞれ

選ぶ（この選び方は 2^3 通り）とよい。

したがって，${}_4\mathrm{C}_2\cdot 4\cdot 2^3=192$ 通りある。

（ii）題意の 2 本の直線がともに y 軸に垂直であるとき

（ i)と同様に考えて 192 通り。

（iii）題意の 2 本の直線の一方が x 軸に垂直で，他方が y 軸に垂直であるとき

2 本の直線の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=4^2$ 通りある。

選ばれた 2 本の直線が $x=1,\ y=1$ であるときを考える。

このとき，直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$ かつ $y=2,\ y=3,\ y=4$ 上の 9 点から題意を満たすように

5 点を選ぶ方法を考える。

5 点が 6 本の直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$， $y=2,\ y=3,\ y=4$ のうちの 4 本以下の直線上に集まる

ことはないので，

「9 点から 5 点を選ぶ場合（${}_9\mathrm{C}_5$ 通り）」から

「5 点が 6 本の直線 $x=2,\ x=3,\ x=4$， $y=2,\ y=3,\ y=4$ のうちの 5 本の直線上にある 6 点に集まる場合」を除けばよく，直線の選び方が ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りあり，そのそれぞれに対して点の選び方が ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りあることを考えて

$${}_9\mathrm{C}_5 - {}_6\mathrm{C}_5 \cdot {}_6\mathrm{C}_5 = 126 - 36 = 90 \ \text{通り}$$

ある。よってこのとき， $4^2 \cdot 90 = 1440$ 通りある。

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より，求める場合の数は

$192 + 192 + 1440 = 1824$ 通りある。

（2） 8 本の直線がいずれも選んだ点を少なくとも 1 個含むとき，

4 つの直線 $y=1,\ y=2,\ y=3,\ y=4$ 上のどれか 1 つの直線上には 2 点, 3 つの直線上には 1 点ある。

2 点ある直線の選び方は 4 通りある。

次に, 2 点ある直線が $y=1$ であるとする。$y=1$ 上の 4 点から 2 点を選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りある。

そして，2 点が $(1,1),\ (2,1)$ であるとし，残りの 3 点の選び方を考える。

$(3,2),\ (4,2),\ (3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (4,4)$ の 6 点から直線 $x=3,\ x=4$ 上のいずれかに

偏らないように 3 点が選ばれる方法は次の（A）（B）の場合がある。

（A） $(3,2),\ (4,2)$ から 1 点， $(3,3),\ (4,3)$ から 1 点， $(4,3),\ (4,4)$ から 1 点をそれぞれ選ぶ場合（2^3 通り）から，3 点が $(3,2),\ (3,3),\ (3,4)$ または $(4,2),\ (4,3),\ (4,4)$ になる場合（2 通り）を除いて $2^3-2=6$ 通り。

（B） $(3,2),\ (3,3),\ (4,3)$ から 1 点， $(4,2),\ (3,4),\ (4,4)$ から 1 点が y 座標が異なる 2 点として選ばれ（6 通り），残りの 1 点が $x=1,\ x=2$ 上のさらに前述の 2 点と y 座標が異なる 2 点から選ばれる（2 通り）場合より $6 \cdot 2 = 12$ 通り。

よって（A）（B）より $6+12=18$ 通り。

したがって，求める場合の数は $4 \cdot 6 \cdot 18 = 432$ 通りある。