[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$a>0,\ b>0$とする。座標平面上の曲線

$C:\ y=x^3-3ax^2+b$

が以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に x 座標と y 座標が

ともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

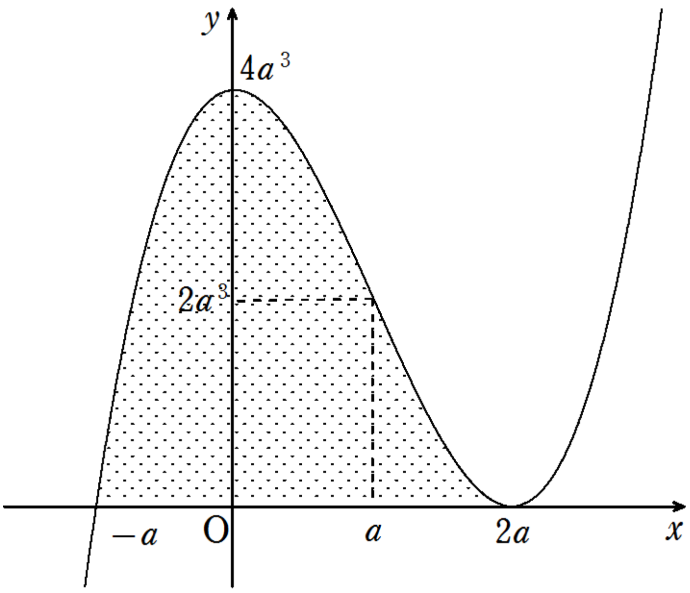
$f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおく。

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ より $f'(x)=0$ となる x は $x=0,\ 2a$

$f(0)=b>0$ であるから 条件 1 における接点の x 座標は $2a$

よって，$f(2a)=8a^3-12a^3+b=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=4a^3$

このとき，x 軸と C で囲まれた領域は次の図の打点部分になる。ただし，境界は含まない。



x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶことにする。

$a\geqq 1$のとき，少なくとも 2 つの格子点$(0, 1),\ (1, 1)$が題意の領域に含まれてしまうので

$0<a<1$ …①

$0 < a < 1$のとき$0 < 2a^3 < 2$であるから，ちょうど１個の格子点となるのは$(0, 1)$である。

よって，$(0, 1)$がちょうど１個の格子点となるために $1 < 4a^3 \leqq 2$ であることが必要である。

これを解くと $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ …②

②は①を満たすので，②が求めるaの範囲である。

したがって $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$