[東京大学 2020 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$a>0,\ b>0$ とする。座標平面上の曲線

$$C:\ y=x^3-3ax^2+b$$

が以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4),\qquad y = b \quad (b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

がある。以下，16 個の点

$$(a,\ b) \quad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

から異なる 5 点を選ぶことを考える。

(1)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$\ell : y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と ℓ 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

n, k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。