[東京大学 2019 年前期 理科 $\boxed{1}$]

★ ★

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

★ ★

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

ここで,

$$I_1=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx,\quad I_2=\int_0^1\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

とおくと

$$I_1=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\sqrt{2}-\frac{2}{3}$$

次に

I_2 について $x=\tan\theta$ と置換すると

$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$, $x:0\to1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$I_2=\int_0^1\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^3\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\right)\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left(\tan^3\theta\right)\left(\cos^3\theta\right)+\left(\tan^2\theta\right)\left(\cos^4\theta\right)\right\}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}+\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}+\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{(-\cos\theta)'}{\cos^2\theta}-\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-2$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{9}{4}$$

となる。

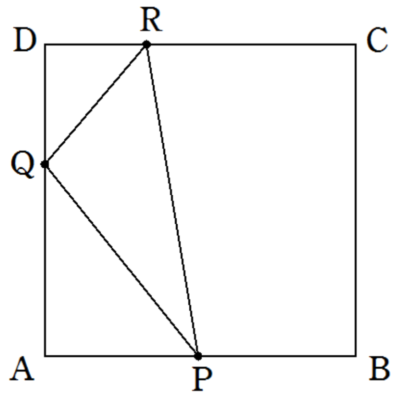
したがって，求める定積分の値は

$$I_1+I_2=\sqrt{2}-\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}$$

一辺の長さが1の正方形ABCDを考える。3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあり，3点A, P, Qおよび3点P, Q, Rはどちらも面積が$\dfrac{1}{3}$の三角形の3頂点であるとする。

$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$の最大値，最小値を求めよ。



$\mathrm{AP}=p, \mathrm{AQ}=q, \mathrm{DR}=r$ とおく。

3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあるから，

$0 \leqq p \leqq 1$ かつ $0 \leqq q \leqq 1$ かつ $0 \leqq r \leqq 1$ …①

また，△APQの面積が$\dfrac{1}{3}$であることから

$\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}$ …②

さらに，△PQRの面積が$\dfrac{1}{3}$であることから

台形APRD－{△APQ＋△DQR} $=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(1-q)r\right\}=\dfrac{1}{3}$

したがって $p+qr=\dfrac{4}{3}$ …③

②より $p \neq 0$ であるから $q=\dfrac{2}{3p}$ …④

これを③に代入して $p+\dfrac{2}{3p}r=\dfrac{4}{3}$ より $r=\dfrac{p(4-3p)}{2}$ …⑤

$p \neq 0$と①，④，⑤より

$0<p \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{2}{3p} \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{p(4-3p)}{2} \leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ …⑥ かつ $0 \leqq -3p^2+4p \leqq 2$ …⑦

となるが，⑥のとき，$-3p^2+4p=-3\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ より $1 \leqq -3p^2+4p \leqq \dfrac{4}{3}$ であるから

⑥かつ⑦ $\Leftrightarrow$ ⑥：$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ であり，これが p のとり得る値の範囲である。

次に，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{r}{q}=\dfrac{\dfrac{p(4-3p)}{2}}{\dfrac{2}{3p}}=\dfrac{3p^2(4-3p)}{4}=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ であり，

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ とおくと $f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^3=-\dfrac{3}{4}p(9p-8)$ より

$f(p)$の増減は下表に従う。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

よって，$f(p)$すなわち$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$の最大値は $\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$

[東京大学 2019 年前期 理科 $\boxed{3}$]

座標空間内に5点 $A(2,\ 0,\ 0)$， $B(0,\ 2,\ 0)$， $C(-2,\ 0,\ 0)$， $D(0,\ -2,\ 0)$， $E(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分ABの中点Mと線分ADの中点Nを通り，直線AEに平行な平面を α とする。さらに， p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし，点 $P(p,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 八面体PABCDEの平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体PABCDEの平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

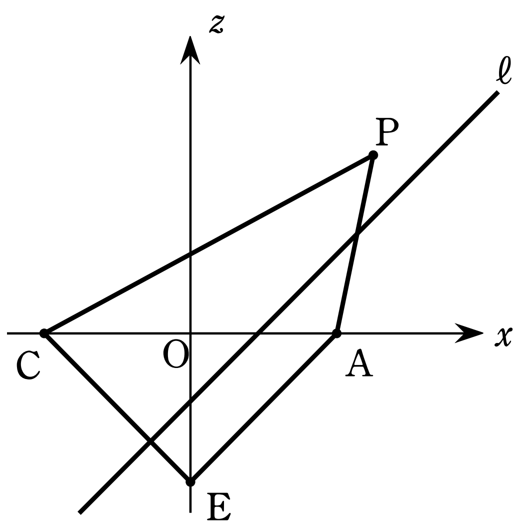
(3) 実数 p が(2)で定まる範囲にあるとする。八面体PABCDEの平面 α による切り口のうち， $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ。

(1) $M(1,\ 1,\ 0)$, $N(1,\ -1,\ 0)$ の中点 $(1,\ 0,\ 0)$ も α 上にあり，

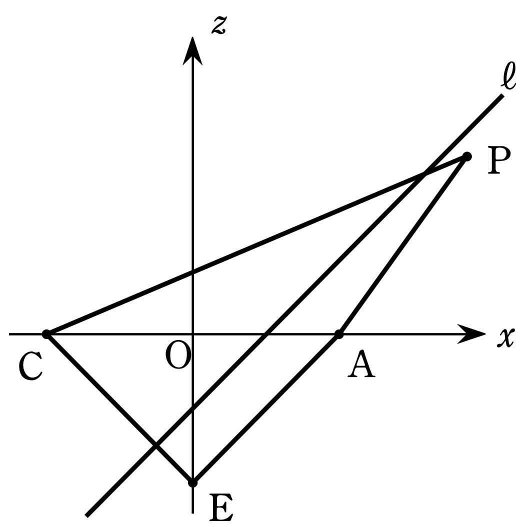
α はAEに平行なので， $y=0$ における α の切り口は直線 $\ell : z = x - 1$ である。

また， xz 平面上で $P(p,\ 2)$ が ℓ に関してどちら側にあるかについては， p と3の大小により変わることに注意して切り口を図示すると次の図のようになる。

$2 < p \leqq 3$ のとき



$3 < p < 4$ のとき



(2)（ i ） $2 < p \leqq 3$ のとき

α はPA, AB, AD, BD, DE, CEと交わり，八角形にはならない。

（ⅱ）$3<p<4$のとき

αはPB, PC, PD, AB, AD, BE, DE, CEと交わり，これらの8個の交点の任意の3点は同一直線上にはないから，切り口は八角形になる。

よって求めるpの範囲は

$3<p<4$

(3) 8個の交点のうち$y \geqq 0,\ z \geqq 0$となるのは，PBとの交点Q，PCとの交点R，ABとの交点Sの3つである。SはMと一致する。

（ⅰ）Qについて

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p,\ -2,\ 2)$ より，kを実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(kp,\ 2-2k,\ 2k)$

α上の点は$z=x-1$を満たすから $2k=kp-1$ より $k=\dfrac{-1}{2-p}$

よって $\mathrm{Q}\left(\dfrac{-p}{2-p},\ \dfrac{6-2p}{2-p},\ \dfrac{-2}{2-p}\right)$

（ⅱ）Rについて

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(p+2,\ 0,\ 2)$ より，ℓを実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\ell p+2\ell-2,\ 0,\ 2\ell)$

α上の点は$z=x-1$を満たすから $2\ell=\ell p+2\ell-2-1$ より $\ell=\dfrac{3}{p}$

よって $\mathrm{R}\left(\dfrac{6}{p}-1,\ 0,\ \dfrac{6}{p}\right)$

以上より，$(y,\ z)$は4点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{6-2p}{2-p},\ \dfrac{-2}{2-p}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$を頂点とする四角形の周および内部を動く。

よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{6-2p}{2-p}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{-2}{2-p}=\frac{18-7p}{p(2-p)}$$

[東京大学 2019 年前期 理科 $\boxed{4}$]

★―――★

n を1以上の整数とする。

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

★―――★

(1) $5n^2+9=\left(n^2+1\right)\cdot 5+4$ であるから，ユークリッドの互除法により

$5n^2+9$ と n^2+1 の最大公約数は， n^2+1 と 4 の最大公約数に等しい。

(ｉ) n が偶数のとき

n^2+1 は奇数であるから， n^2+1 と 4 の最大公約数は 1 である。

(ⅱ) n が奇数のとき

$n=2k-1$ （ $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ）とおくと，

$$n^2+1=\left(2k-1\right)^2+1=4k^2-4k+2=2\left(2k^2-2k+1\right)$$

より， n^2+1 は 2 の倍数であるが 4 の倍数ではない。

よって， n^2+1 と 4 の最大公約数は 2 である。

(ｉ)(ⅱ)より， n が偶数のとき $d_n=1$， n が奇数のとき $d_n=2$

(2)

(ｉ) n が偶数のとき

$d_n=1$ であるから， n^2+1 と $5n^2+9$ は 1 以外の公約数をもたない。

よって， $(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になるとすると，

n^2+1， $5n^2+9$ のそれぞれがともに整数の 2 乗になる。

ここで，

$$n^2<n^2+1<n^2+2n+1=\left(n+1\right)^2$$

が成り立つから， n^2+1 は隣り合う 2 つの整数 $n,\ n+1$ の 2 乗の間にあり，2 乗にはならない。

よってこのとき， $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

（ⅱ）n が奇数のとき

$d_n=2$ であるから，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になるとすると，

$n^2+1=2M^2$，$5n^2+9=2N^2$ となる整数 M, N が存在する。

ここで，$n=2k-1$（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおくと，

$$5n^2+9=5\left(2k-1\right)^2+9=20k^2-20k+14=2\left(10k^2-10k+7\right)$$

となるが，さらに

$$10k^2-10k+7=10(k-1)k+7$$

であり，$k-1,\ k$ のいずれかは 2 の倍数であるから，$10k(k-1)$ は 4 の倍数になるので

$10(k-1)k+7$ を 4 で割った余りは 3 である。

ここで，任意の整数 m について

$$\left(2m\right)^2=4m^2$$

$$\left(2m-1\right)^2=4m^2-4m+1=4\left(m-1\right)m+1$$

であるから，整数の 2 乗を 4 で割った余りは 0 または 1 のいずれかである。

よって，$10k^2-10k+7$ は整数の 2 乗にはならない。

（ⅰ)（ⅱ）より，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

以下の問いに答えよ。

(1) n を1以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1}=\cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n>\cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$ に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

---

(1) $x^{2n-1}=\cos x$ …①

$f(x)=x^{2n-1}$，$g(x)=\cos x$ とおく。

(ⅰ) $x<-1$ のとき

$f(x)<-1\leqq g(x)$ であるから，この範囲では①は実数解をもたない。

(ⅱ) $-1\leqq x<0$ のとき

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき $0<g(x)<1$ であるから $f(x)<0<g(x)$ となり，

この範囲では①は実数解をもたない。

(ⅲ) $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$f(x)$ は単調増加，$g(x)$ は単調減少であり，$f(0)=0<1=g(0)$ かつ $f(1)=1>\cos 1=g(1)$

であるから，②はただ１つの実数解 a_n をもつ。

(ⅳ) $x>1$ のとき

$g(x)\leqq 1<f(x)$ であるから，この範囲では①は実数解をもたない。

(ⅰ)～(ⅳ)より ①はただ１つの実数解 a_n をもつ。

(2) (1)より $0<a_n<1$ である。

また，$0 \leqq x \leqq 1$ で $g(x)$ は単調減少であるから $g(a_n)>g(1)$

すなわち $\cos a_n > \cos 1$ が成り立つ。

(3) (2)より $a_n{}^{2n-1} = \cos a_n > \cos 1$ である。

よって，$1 > a_n > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$ であり，$\lim_{n\to\infty}(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = (\cos 1)^0 = 1$ であるから

ハサミウチの原理により，$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

また，$a_n{}^n = \sqrt{a_n{}^{2n}} = \sqrt{a_n \cdot a_n{}^{2n-1}} = \sqrt{a_n \cos a_n}$ であるから

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n{}^n = \sqrt{1 \cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1}$$

さらに，$h(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおく。

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^n - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^n - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1)$$ であり

$h'(x) = \dfrac{1}{2}(x\cos x)^{-\frac{1}{2}}(\cos x - x\sin x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$ であるから $c = \dfrac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$

複素数$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$および実数$a,\ b$が，次の3条件をみたしながら動く。

条件１：$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$は相異なる。

条件２：$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$は4次方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0$ の解である。

条件３：複素数$\alpha\beta+\gamma\delta$の実部は0であり，虚部は0でない。

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$のうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) bをaで表せ。

(3) 複素数$\alpha+\beta$がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

$F(z)=z^4-2z^3-2az+b$， $K=\alpha\beta+\gamma\delta$ とおく。

このとき， $F(z)=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$ であり，条件３よりKは0でない純虚数である。

(1) $a,\ b$は実数であるから，条件２より$F(z)=0$の4解は次の3つのいずれかである。

(A) すべて実数

(B) 2つが実数で，2つが共役な複素数

(C) 共役な複素数が2組

(A)のとき，Kは実数となり不適。

(C)のとき，「$\beta=\overline{\alpha},\ \delta=\overline{\gamma}$」または「$\gamma=\overline{\alpha},\ \delta=\overline{\beta}$」の場合があるが，

前者の場合，$K=\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\overline{\alpha}+\gamma\overline{\gamma}=|\alpha|^2+|\gamma|^2$

後者の場合，$K=\alpha\beta+\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}$

であり，いずれもKが実数となる。

よって，(B)の場合しかありえず，題意は示された。

（2）α, β がともに実数であるとすると $\delta=\overline{\gamma}$ となり，

$K=\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\gamma\overline{\gamma}=\alpha\beta+|\gamma|^2$ が実数となることがら不適。

よって，α, γ がともに実数であるとしてよい。

$\alpha=s,\ \gamma=t,\ \beta=u+vi,\ \delta=u-vi$ （s, t, u, v は実数，$s\neq t$，$v\neq 0$ …①）であるとする。

このとき，

$$K=s(u+vi)+t(u-vi)=(s+t)u+(s-t)vi$$

である。

K の実部が 0 であることから $s+t=0$ または $u=0$ である。

（ｉ）$s+t=0$ のとき

$t=-s$ より

$$F(z)=(z-s)(z+s)\{z-(u+vi)\}\{z-(u-vi)\}=(z^2-s^2)(z^2-2uz+u^2+v^2)$$

3 次の係数を比較して $-2u=-2$ より $u=1$

さらに 2 次の係数を比較して $1+v^2-s^2=0$ より $v^2=s^2-1$ …②

このとき，$f(z)=(z^2-s^2)(z^2-2z+s^2)$ となり，1 次以下の係数を比較して

$2s^2=-2a$，$-s^4=b$ すなわち $a=-s^2$，$b=-s^4$ を得る。

よって $b=-a^2$ となる。

（ⅱ）$u=0$ のとき

$$F(z)=(z-s)(z-t)(z-vi)(u+vi)=\{z^2-(s+t)z+st\}(z^2+v^2)$$

3 次の係数を比較して $-(s+t)=-2$ より $s+t=2$ …③

さらに 2 次の係数を比較して $st+v^2=0$ …④

このとき，$F(z)=(z^2-2z-v^2)(z^2+v^2)$ となり，1 次以下の係数を比較して

$-2v^2=-2a$，$-v^4=b$ すなわち $a=v^2$，$b=-v^4$ を得る。

よって $b=-a^2$ となる。

以上より，$b=-a^2$ である。

(3) (2)より $b=-a^2$ であるから

$$z^4-2z^3-2az+b=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4-2z^3-2az-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+2za+z^3(2-z)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+z^2)(a+2z-z^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z^2+a)(z^2-2z-a)=0$$

となる。

a は実数であるから

$$z=\pm\sqrt{-a},\, 1\pm\sqrt{1+a}$$

である。このうちの 2 つが虚数であるから

$-a(1+a)<0$ より $a<-1,\ 0<a$

（ｉ）$a<-1$ のとき

$\pm\sqrt{-a}$ は実数，$1\pm\sqrt{1+a}=1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$ は虚数である。

$\alpha=s$ は $\pm\sqrt{-a}$ のいずれか，$\beta=u+vi$ は $1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$ のいずれかである。

よって，$\alpha+\beta=s+u+vi=\pm\sqrt{-a}+1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$（複号任意） となる。

ここで，$\alpha+\beta$ の実部を x，虚部を y とすると

$$x=\pm\sqrt{-a}+1,\quad y=\pm\sqrt{-(1+a)}$$

であり，

$x-1=\pm\sqrt{-a}$ より $(x-1)^2=-a$

$y=\pm\sqrt{-(1+a)}$ より $y^2=-(1+a)$

となる。a を消去すると

$$y^2=-1+(x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-y^2=1$$

ただし，$a<-1$ より $(x-1)^2>1$ であるから，$x<0,\ 2<x$ の範囲である。

（ⅱ）$a>0$のとき

$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ は純虚数，$1\pm\sqrt{1+a}$ は実数である。

$\alpha=s$ は$1\pm\sqrt{1+a}$ のいずれか，$\beta=u+vi$ は$\pm\sqrt{a}\,i$ のいずれかである。

よって，$\alpha+\beta=s+u+vi=1\pm\sqrt{1+a}\pm\sqrt{a}\,i$ （複号任意）となる。

ここで，$\alpha+\beta$ の実部をx，虚部をyとすると

$$x=1\pm\sqrt{1+a},\quad y=\pm\sqrt{a}$$

であり，（ⅰ）と同様にして

$$(x-1)^2-y^2=1,\quad x<0,\ 2<x$$

を得る。

以上より，複素数$\alpha+\beta$がとりうる範囲を複素数平面上に図示すると次の図のような

双曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ の $(0,\,0)$，$(2,\,0)$を除いたものになる。