複素数$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$および実数$a,\ b$が，次の3条件をみたしながら動く。

条件１：$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$は相異なる。

条件２：$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$は4次方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0$ の解である。

条件３：複素数$\alpha\beta+\gamma\delta$の実部は0であり，虚部は0であない。

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$のうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数

であることを示せ。

(2) bをaで表せ。

(3) 複素数$\alpha+\beta$がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

$F(z)=z^4-2z^3-2az+b$， $K=\alpha\beta+\gamma\delta$ とおく。

このとき， $F(z)=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$ であり，条件３よりKは0でない純虚数である。

(1) $a,\ b$は実数であるから，条件２より$F(z)=0$の4解は次の3つのいずれかである。

(A) すべて実数

(B) 2つが実数で，2つが共役な複素数

(C) 共役な複素数が2組

(A)のとき， Kは実数となり不適。

(C)のとき，「$\beta=\overline{\alpha},\ \delta=\overline{\gamma}$」または「$\gamma=\overline{\alpha},\ \delta=\overline{\beta}$」の場合があるが,

前者の場合， $K=\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\overline{\alpha}+\gamma\overline{\gamma}=|\alpha|^2+|\gamma|^2$

後者の場合， $K=\alpha\beta+\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}$

であり，いずれもKが実数となる。

よって，(B)の場合しかありえず，題意は示された。

(2) α, β がともに実数であるとすると $\delta=\overline{\gamma}$ となり，

$K=\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\gamma\overline{\gamma}=\alpha\beta+|\gamma|^2$ が実数となることから不適。

よって，α, γ がともに実数であるとしてよい。

$\alpha=s, \gamma=t, \beta=u+vi, \delta=u-vi$ （s, t, u, v は実数，$s\neq t$，$v\neq 0$ …①）であるとする。

このとき，

$$K=s(u+vi)+t(u-vi)=(s+t)u+(s-t)vi$$

である。

K の実部が 0 であることから $s+t=0$ または $u=0$ である。

（ⅰ）$s+t=0$ のとき

$t=-s$ より

$$F(z)=(z-s)(z+s)\{z-(u+vi)\}\{z-(u-vi)\}=(z^2-s^2)(z^2-2uz+u^2+v^2)$$

3 次の係数を比較して $-2u=-2$ より $u=1$

さらに 2 次の係数を比較して $1+v^2-s^2=0$ より $v^2=s^2-1$ …②

このとき，$f(z)=(z^2-s^2)(z^2-2z+s^2)$ となり，1 次以下の係数を比較して

$2s^2=-2a$，$-s^4=b$ すなわち $a=-s^2$，$b=-s^4$ を得る。

よって $b=-a^2$ となる。

（ⅱ）$u=0$ のとき

$$F(z)=(z-s)(z-t)(z-vi)(u+vi)=\{z^2-(s+t)z+st\}(z^2+v^2)$$

3 次の係数を比較して $-(s+t)=-2$ より $s+t=2$ …③

さらに 2 次の係数を比較して $st+v^2=0$ …④

このとき，$F(z)=(z^2-2z-v^2)(z^2+v^2)$ となり，1 次以下の係数を比較して

$-2v^2=-2a$，$-v^4=b$ すなわち $a=v^2$，$b=-v^4$ を得る。

よって $b=-a^2$ となる。

以上より，$b=-a^2$ である。

(3) (2)より $b=-a^2$ であるから

$$z^4-2z^3-2az+b=0 \iff z^4-2z^3-2az-a^2=0$$

$$\iff a^2+2za+z^3(2-z)=0$$

$$\iff (a+z^2)(a+2z-z^2)=0$$

$$\iff (z^2+a)(z^2-2z-a)=0$$

となる。

a は実数であるから

$$z=\pm\sqrt{-a},\ 1\pm\sqrt{1+a}$$

である。このうちの 2 つが虚数であるから

$-a(1+a)<0$ より $a<-1,\ 0<a$

(ｉ) $a<-1$ のとき

$\pm\sqrt{-a}$ は実数，$1\pm\sqrt{1+a}=1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$ は虚数である。

$\alpha=s$ は $\pm\sqrt{-a}$ のいずれか，$\beta=u+vi$ は $1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$ のいずれかである。

よって，$\alpha+\beta=s+u+vi=\pm\sqrt{-a}+1\pm\sqrt{-(1+a)}\,i$ （複号任意） となる。

ここで，$\alpha+\beta$ の実部を x，虚部を y とすると

$$x=\pm\sqrt{-a}+1,\quad y=\pm\sqrt{-(1+a)}$$

であり，

$x-1=\pm\sqrt{-a}$ より $(x-1)^2=-a$

$y=\pm\sqrt{-(1+a)}$ より $y^2=-(1+a)$

となる。a を消去すると

$$y^2=-1+(x-1)^2 \iff (x-1)^2-y^2=1$$

ただし，$a<-1$ より $(x-1)^2>1$ であるから，$x<0,\ 2<x$ の範囲である。

（ⅱ） $a>0$ のとき

$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ は純虚数，$1\pm\sqrt{1+a}$ は実数である。

$\alpha=s$ は $1\pm\sqrt{1+a}$ のいずれか，$\beta=u+vi$ は $\pm\sqrt{a}\,i$ のいずれかである。

よって，$\alpha+\beta=s+u+vi=1\pm\sqrt{1+a}\pm\sqrt{a}\,i$ （複号任意）となる。

ここで，$\alpha+\beta$ の実部を x，虚部を y とすると

$x=1\pm\sqrt{1+a}$，$y=\pm\sqrt{a}$

であり，(ⅰ)と同様にして

$(x-1)^2-y^2=1$，$x<0,\ 2<x$

を得る。

以上より，複素数 $\alpha+\beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示すると次の図のような双曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ の $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を除いたものになる。