以下の問いに答えよ。

(1) n を1以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1}=\cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty} a_n{}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

(1) $x^{2n-1}=\cos x$ …①

$f(x)=x^{2n-1}$，$g(x)=\cos x$ とおく。

(i) $x<-1$ のとき

$f(x)<-1\leqq g(x)$ であるから，この範囲では①は実数解をもたない。

(ii) $-1\leqq x<0$ のとき

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき $0<g(x)<1$ であるから $f(x)<0<g(x)$ となり，

この範囲では①は実数解をもたない。

(iii) $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$f(x)$ は単調増加，$g(x)$ は単調減少であり，$f(0)=0<1=g(0)$ かつ $f(1)=1>\cos 1=g(1)$

であるから，②はただ１つの実数解 a_n をもつ。

(iv) $x>1$ のとき

$g(x)\leqq 1<f(x)$ であるから，この範囲では①は実数解をもたない。

(i)～(iv)より ①はただ１つの実数解 a_n をもつ。

(2) (1)より $0 < a_n < 1$ である。

また，$0 \leqq x \leqq 1$ で $g(x)$ は単調減少であるから $g(a_n) > g(1)$

すなわち $\cos a_n > \cos 1$ が成り立つ。

(3) (2)より $a_n{}^{2n-1} = \cos a_n > \cos 1$ である。

よって，$1 > a_n > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$ であり，$\lim_{n\to\infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = (\cos 1)^0 = 1$ であるから

ハサミウチの原理により，$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

また，$a_n{}^n = \sqrt{a_n{}^{2n}} = \sqrt{a_n \cdot a_n{}^{2n-1}} = \sqrt{a_n \cos a_n}$ であるから

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n{}^n = \sqrt{1 \cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1}$$

さらに，$h(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおく。

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^n - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^n - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1)$$ であり

$h'(x) = \dfrac{1}{2}(x \cos x)^{-\frac{1}{2}}(\cos x - x \sin x) = \dfrac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}}$ であるから $c = \dfrac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$