[東京大学 2019 年前期 理科 $\boxed{4}$]

★ ★

n を1以上の整数とする。

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

★ ★

(1) $5n^2+9=\left(n^2+1\right)\cdot 5+4$ であるから，ユークリッドの互除法により

$5n^2+9$ と n^2+1 の最大公約数は， n^2+1 と 4 の最大公約数に等しい。

(ｉ) n が偶数のとき

n^2+1 は奇数であるから， n^2+1 と 4 の最大公約数は 1 である。

(ii) n が奇数のとき

$n=2k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) とおくと，

$$n^2+1=\left(2k-1\right)^2+1=4k^2-4k+2=2\left(2k^2-2k+1\right)$$

より， n^2+1 は 2 の倍数であるが 4 の倍数ではない。

よって， n^2+1 と 4 の最大公約数は 2 である。

(ｉ)(ii)より， n が偶数のとき $d_n=1$， n が奇数のとき $d_n=2$

(2)

(ｉ) n が偶数のとき

$d_n=1$ であるから， n^2+1 と $5n^2+9$ は 1 以外の公約数をもたない。

よって， $(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になるとすると，

n^2+1， $5n^2+9$ のそれぞれがともに整数の 2 乗になる。

ここで，

$$n^2<n^2+1<n^2+2n+1=\left(n+1\right)^2$$

が成り立つから， n^2+1 は隣り合う 2 つの整数 $n, n+1$ の 2 乗の間にあり，2 乗にはならない。

よってこのとき， $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

（ⅱ）n が奇数のとき

$d_n = 2$ であるから，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になるとすると，

$n^2+1=2M^2$，$5n^2+9=2N^2$ となる整数 M, N が存在する。

ここで，$n=2k-1$（$k=1, 2, 3, \cdots$）とおくと，

$$5n^2+9=5\left(2k-1\right)^2+9=20k^2-20k+14=2\left(10k^2-10k+7\right)$$

となるが，さらに

$$10k^2-10k+7=10(k-1)k+7$$

であり，$k-1, k$ のいずれかは 2 の倍数であるから，$10k(k-1)$ は 4 の倍数になるので

$10(k-1)k+7$ を 4 で割った余りは 3 である。

ここで，任意の整数 m について

$$\left(2m\right)^2=4m^2$$

$$\left(2m-1\right)^2=4m^2-4m+1=4\left(m-1\right)m+1$$

であるから，整数の 2 乗を 4 で割った余りは 0 または 1 のいずれかである。

よって，$10k^2-10k+7$ は整数の 2 乗にはならない。

（ⅰ）（ⅱ）より，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。