座標空間内に5点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(-2,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -2,\ 0)$，E$(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分ABの中点Mと線分ADの中点Nを通り，直線AEに平行な平面をαとする。さらに，pは$2 < p < 4$をみたす実数とし，点P$(p,\ 0,\ 2)$を考える。

(1) 八面体PABCDEの平面$y=0$による切り口および，平面αの平面$y=0$による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体PABCDEの平面αによる切り口が八角形となるpの範囲を求めよ。

(3) 実数pが(2)で定まる範囲にあるとする。八面体PABCDEの平面αによる切り口のうち，$y \geqq 0,\ z \geqq 0$の部分を点$(x,\ y,\ z)$が動くとき，座標平面上で点$(y,\ z)$が動く範囲の面積を求めよ。

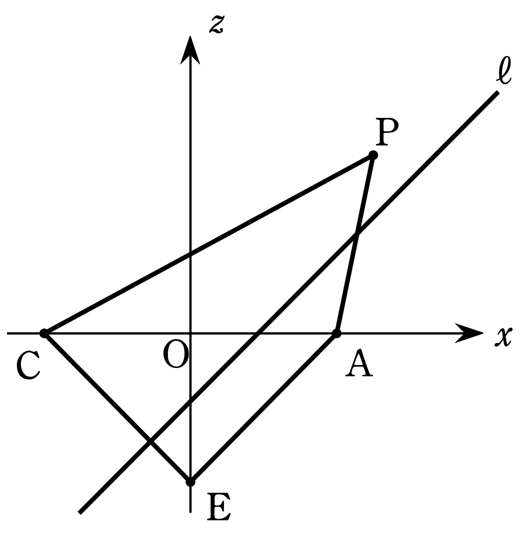
---

(1) M$(1,\ 1,\ 0)$, N$(1,\ -1,\ 0)$の中点$(1,\ 0,\ 0)$もα上にあり，

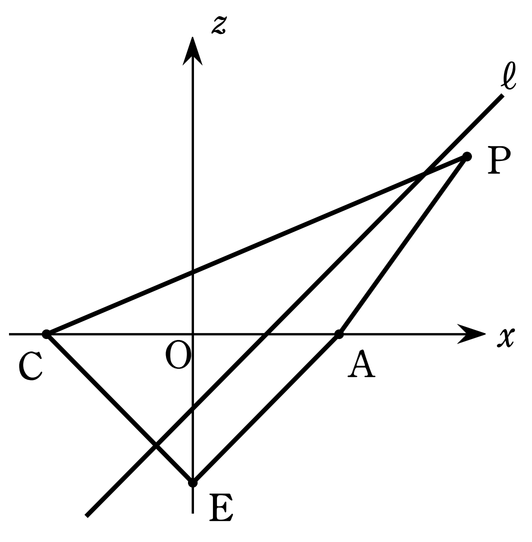
αはAEに平行なので，$y=0$におけるαの切り口は直線 $\ell : z = x - 1$ である。

また，xz平面上でP$(p,\ 2)$がℓに関してどちら側にあるかについては，pと3の大小により変わることに注意して切り口を図示すると次の図のようになる。

$2 < p \leqq 3$のとき



$3 < p < 4$のとき



(2) (i) $2 < p \leqq 3$のとき

αはPA, AB, AD, BD, DE, CEと交わり，八角形にはならない。

（ⅱ）$3<p<4$のとき

αはPB, PC, PD, AB, AD, BE, DE, CEと交わり，これらの8個の交点の任意の３点は同一直線上にはないから，切り口は八角形になる。

よって求めるpの範囲は

$3<p<4$

(3) 8個の交点のうち$y\geqq 0$, $z\geqq 0$となるのは，PBとの交点Q，PCとの交点R，ABとの交点Sの3つである。SはMと一致する。

（ⅰ）Qについて

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p,\ -2,\ 2)$ より，kを実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(kp,\ 2-2k,\ 2k)$

α上の点は$z=x-1$を満たすから $2k=kp-1$ より $k=\dfrac{-1}{2-p}$

よって $\mathrm{Q}\left(\dfrac{-p}{2-p},\ \dfrac{6-2p}{2-p},\ \dfrac{-2}{2-p}\right)$

（ⅱ）Rについて

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(p+2,\ 0,\ 2)$ より，ℓを実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\ell p+2\ell-2,\ 0,\ 2\ell)$

α上の点は$z=x-1$を満たすから $2\ell=\ell p+2\ell-2-1$ より $\ell=\dfrac{3}{p}$

よって $\mathrm{R}\left(\dfrac{6}{p}-1,\ 0,\ \dfrac{6}{p}\right)$

以上より，$(y,\ z)$は4点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{6-2p}{2-p},\ \dfrac{-2}{2-p}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$を頂点とする四角形の周および内部を動く。

よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{6-2p}{2-p}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{-2}{2-p}=\frac{18-7p}{p(2-p)}$$