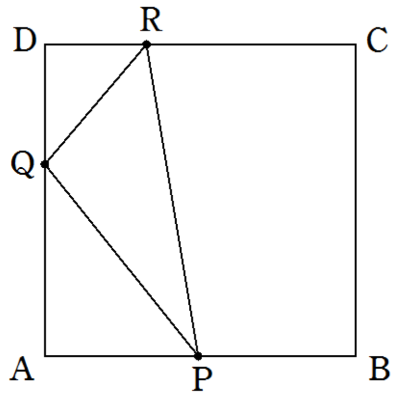
[東京大学 2019年前期 理科 $\boxed{2}$]

一辺の長さが1の正方形ABCDを考える。3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあり，3点A, P, Qおよび3点P, Q, Rはどちらも面積が$\dfrac{1}{3}$の三角形の3頂点であるとする。

$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$の最大値，最小値を求めよ。



$\mathrm{AP}=p, \mathrm{AQ}=q, \mathrm{DR}=r$ とおく。

3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあるから，

$0 \leqq p \leqq 1$ かつ $0 \leqq q \leqq 1$ かつ $0 \leqq r \leqq 1$ …①

また，△APQの面積が$\dfrac{1}{3}$であることから

$\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}$ …②

さらに，△PQRの面積が$\dfrac{1}{3}$であることから

台形APRD－{△APQ＋△DQR} $=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(1-q)r\right\}=\dfrac{1}{3}$

したがって $p+qr=\dfrac{4}{3}$ …③

②より $p \neq 0$ であるから $q=\dfrac{2}{3p}$ …④

これを③に代入して $p+\dfrac{2}{3p}r=\dfrac{4}{3}$ より $r=\dfrac{p(4-3p)}{2}$ …⑤

$p \neq 0$と①，④，⑤より

$0<p \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{2}{3p} \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{p(4-3p)}{2} \leqq 1$

⇔ $\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ …⑥ かつ $0 \leqq -3p^2+4p \leqq 2$ …⑦

となるが，⑥のとき，$-3p^2+4p=-3\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ より $1 \leqq -3p^2+4p \leqq \dfrac{4}{3}$ であるから

⑥かつ⑦ ⇔ ⑥：$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ であり，これがpのとり得る値の範囲である。

次に，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{r}{q}=\dfrac{\dfrac{p(4-3p)}{2}}{\dfrac{2}{3p}}=\dfrac{3p^2(4-3p)}{4}=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ であり，

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ とおくと $f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^3=-\dfrac{3}{4}p(9p-8)$ より

$f(p)$の増減は下表に従う。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

よって，$f(p)$すなわち$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$の最大値は $\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$