[東京大学 2019年前期 理科 1]

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

ここで，

$$I_1 = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx, \quad I_2 = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

とおくと

$$I_1 = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

次に

I_2 について $x = \tan\theta$ と置換すると

$dx = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$， $x : 0 \to 1$ のとき $\theta : 0 \to \frac{\pi}{4}$ であるから

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^3\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\right)\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left(\tan^3\theta\right)\left(\cos^3\theta\right)+\left(\tan^2\theta\right)\left(\cos^4\theta\right)\right\}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}+\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}+\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{(-\cos\theta)'}{\cos^2\theta}-\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-2$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{9}{4}$$

となる。

したがって，求める定積分の値は

$$I_1+I_2=\sqrt{2}-\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}$$