[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面上の原点を O とし， O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) を辺の長さが1の正方形の頂点とする。

3点 $\mathrm{P}(p, 0)$ $\mathrm{Q}(0, q)$, $\mathrm{R}(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり，

3点 O, P, Q および3点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し， p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

$\mathrm{OP}=p,\ \mathrm{OQ}=q,\ \mathrm{CR}=r$ とおく。

3点 P, Q, R はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあるから，

$0 \leqq p \leqq 1$ かつ $0 \leqq q \leqq 1$ かつ $0 \leqq r \leqq 1$ …①

また，△OPQ の面積が $\dfrac{1}{3}$ であることから

$\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}$ …②

さらに，△PQR の面積が $\dfrac{1}{3}$ であることから

台形OPRC −｛△OPQ + △CQR｝ $=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(1-q)r\right\}=\dfrac{1}{3}$

したがって $p+qr=\dfrac{4}{3}$ …③

②より $p \neq 0$ であるから $q=\dfrac{2}{3p}$ …④

これを③に代入して $p+\dfrac{2}{3p}r=\dfrac{4}{3}$ より $r=-\dfrac{3}{2}p^2+2p$ …⑤

$p \neq 0$ と①，④，⑤より

$0<p \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{2}{3p} \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{p(4-3p)}{2} \leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ …⑥ かつ $0 \leqq -3p^2+4p \leqq 2$ …⑦

となるが，⑥のとき， $-3p^2+4p=-3\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ より $1 \leqq -3p^2+4p \leqq \dfrac{4}{3}$ であるから

⑥かつ⑦　$\Leftrightarrow$　⑥：$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$　であり，これが p のとり得る値の範囲である。

このとき

$$q = \frac{2}{3p} \text{ より } \frac{2}{3} \leqq q \leqq 1$$

$$r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \text{ より } \frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{2}{3}$$

である。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{r}{q} = \dfrac{\dfrac{p(4-3p)}{2}}{\dfrac{2}{3p}} = \dfrac{3p^2(4-3p)}{4} = 3p^2 - \dfrac{9}{4}p^3$ であり，

$f(p) = 3p^2 - \dfrac{9}{4}p^3$ とおくと

$$f'(p) = 6p - \frac{27}{4}p^3 = -\frac{3}{4}p(9p-8) \text{ より}$$

$f(p)$ の増減は下表に従う。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

よって，$f(p)$ すなわち $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$

[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{2}$]

O を原点とする座標平面において，点 A(2, 2) を通り，線分 OA と垂直な直線を ℓ とする。座標平面上を点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

条件１：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件２：点 O と直線 ℓ の距離を c とし，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と直線 ℓ の距離を d とするとき　$cd \geqq (p-1)^2$

このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1)　D を図示し，その面積を求めよ。

(2)　$\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

---

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 2)\cdot(p,\ q) = 2p+2q$

条件１より　$8 \leqq 2p+2q \leqq 17 \quad\Leftrightarrow\quad 4 \leqq p+q \leqq \dfrac{17}{2}$　$\cdots$①

また，$c = \mathrm{OA} = 2\sqrt{2}$ であり，ℓ ： $x+y=4$　と①より

$$d = \frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

となる。よって，

$$cd = 2\sqrt{2}\cdot\frac{p+q-4}{\sqrt{2}} = 2(p+q-4)$$

となり，これと条件２より

$$2(p+q-4) \geqq (p-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad q \geqq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2}$$

となる。ここで，$C : y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{9}{2}$　とおくと，C と $\ell : x+y=4$ は

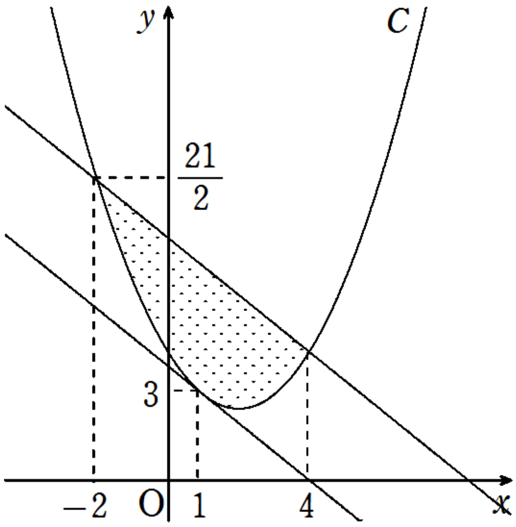
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} - (-x+4) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

より，$x=1$ で接する。また，C と $x+y=\dfrac{17}{2}$ は

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} - \left(\frac{17}{2} - x\right) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$$

より，$x=-2,\ 4$ で交わる。

以上より，Dは次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



また，Dの面積は

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(\frac{17}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx=\int_{-2}^{4}\left\{\left(\frac{17}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3$$

$$=18$$

となる。

（2）まず，直線 $y=mx$ が C と接する m および接点の x 座標を求める。

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=mx \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2(m+2)x+9=0$$

が重解をもつのは，判別式を考えて $(m+2)^2-9=0$ より $m=-5,\ 1$ のときで，

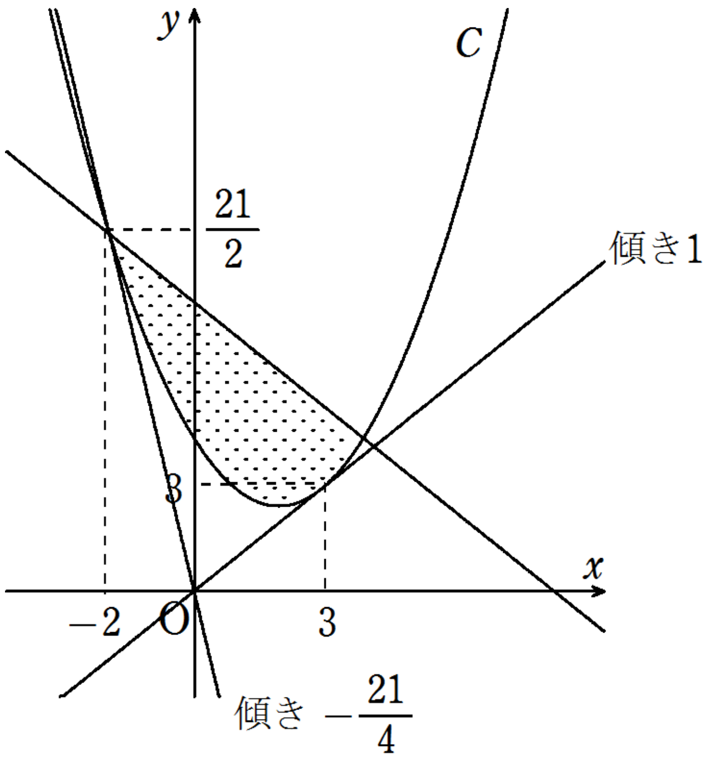
それぞれの場合の重解は $x=-3,\ 3$ である。

次に，$\cos\theta$ が最大となるのは θ が最小となるときであるから，

$\mathrm{P}(3,\ 3)$ のときの $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$\cos\theta$ が最小となるのは θ が最大となるときであるから，

$\mathrm{P}\left(-2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ のときの $\cos\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{2^2+\left(\dfrac{21}{2}\right)^2}}=-\dfrac{4}{\sqrt{457}}$ である。



したがって，求める $\cos\theta$ のとりうる値の範囲は

$$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{3}$]

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，

裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S ：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T ：1回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも1回，点 F に移動する。

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ。

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

コインの表裏の出方は 2^{10} 通りあり，これらは同様に確からしい。

(1) 表が k 回，裏が $10-k$ 回出たとすると，点 P は A から時計回りに

$$k-(10-k)=2k-10$$

だけ進んだ頂点に達する。

S が起こるとは， $2k-10$ が 8 の倍数になることと同値であり， $k=1, 5, 9$ のときである。

よって求める確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}}=\frac{10+252+10}{2^{10}}=\frac{17}{64}$$

(2)（ｉ）$k=1, 9$ で S が起こるとき

正八角形を時計回りまたは反時計回りに１周してＡに戻るため，点Ｐは必ずＦを通過する。

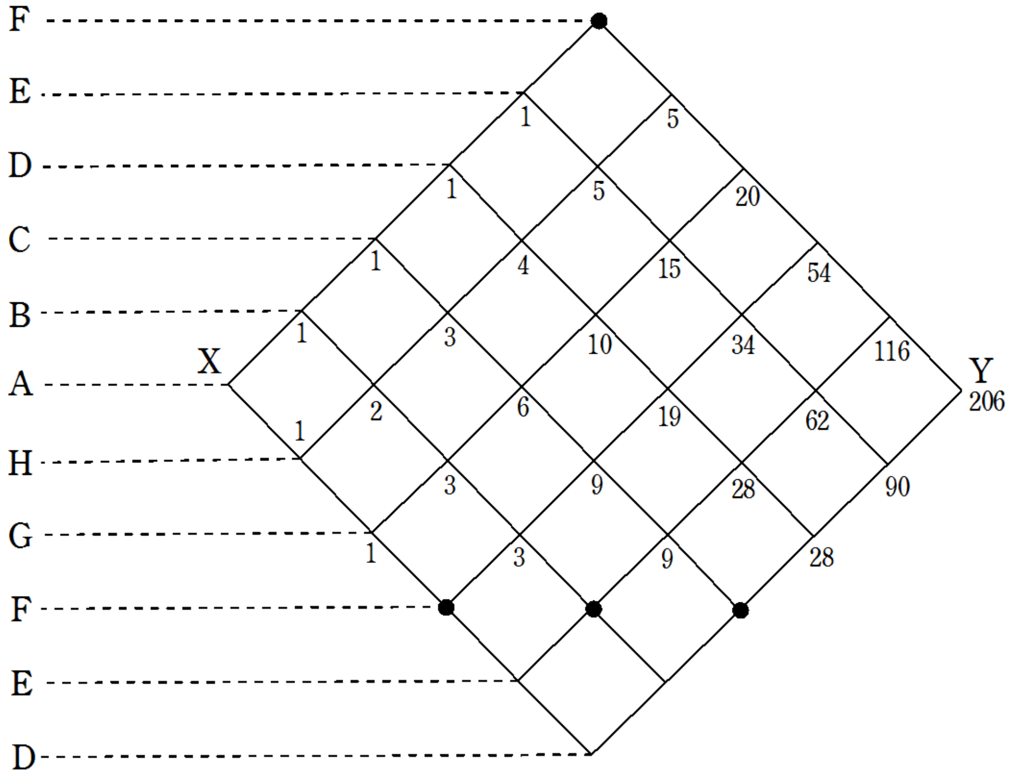
(1)より，これはそれぞれ 10 通りずつある。

（ii）$k=5$ で S が起こるとき

反時計回りに進むことを↗，時計回りに進むことを↘とし，

図のような格子をＸからＹまで最短経路で進むことと対応させて考える。

点Ｆに対応するのは，●印の点である。



●印の４点をいずれも通らない経路の数は図より 206 通りあるから

Ｆを少なくとも１回通る経路の数は $252-206=46$ 通りある。

よって求める確率は

$$\frac{10+46+10}{2^{10}}=\frac{33}{512}$$

[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{4}$]

O を原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x|+|y|\leqq 1$$

が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く領域を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし，不等式

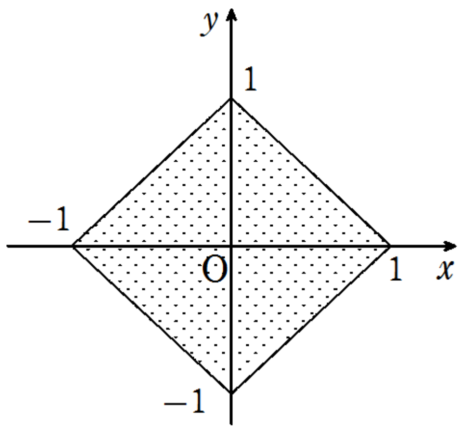
$$|x-a|+|y-b|\leqq 1$$

が表す領域を F とする。また，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

---

(1) $|x|+|y|\leqq 1$ は，「$x\to -x$」「$y\to -y$」「$x,\ y\to -x,\ -y$」としても不変な式であるから，$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ における領域を y 軸，x 軸，原点に関して対称移動させた領域になる。

$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき $x+y\leqq 1$ であるから，D は次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



D は O について点対称な領域であるから，Q の O に関する対称点を Q′ とすると，Q′ も D 全体を動く。

このとき，

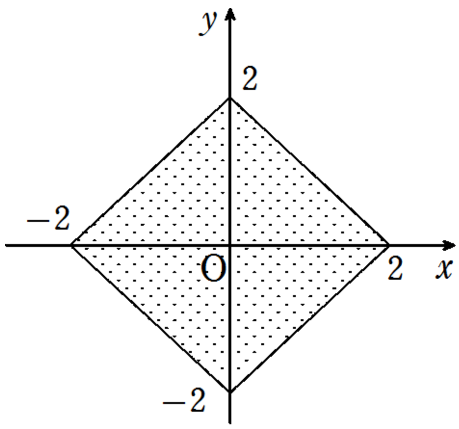
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

となるから，P を固定すると R の動く範囲は

　P が中心となるように D を平行移動させた領域

になる。

よって，P が D 全体を動くと，E は次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



（2） A$(a,\ b)$とおく。

F は D を中心が O から A に移るように平行移動した領域なので，

S が F 内の点であるとは，

　ある D 内の点 P を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とかけること

である。

同様に，T が F 内の点であるとは，

　ある D 内の点 Q を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をかけること

であるから，(1)の点 R を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OU}}&=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$

となる。

したがって，R の動く領域 E と U の動く領域 G は一致する。