[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{4}$]

O を原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x|+|y| \leqq 1$$

が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く領域を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし，不等式

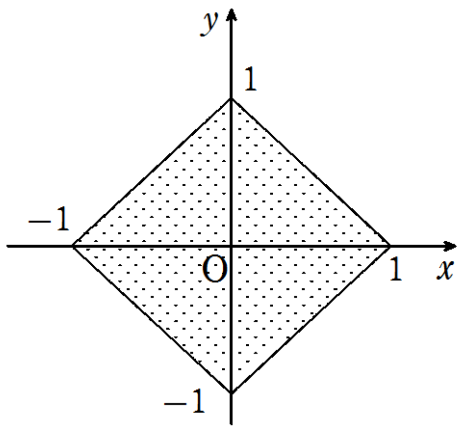
$$|x-a|+|y-b| \leqq 1$$

が表す領域を F とする。また，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

---

(1) $|x|+|y| \leqq 1$ は，「$x \to -x$」「$y \to -y$」「$x,\ y \to -x,\ -y$」としても不変な式であるから，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ における領域を y 軸，x 軸，原点に関して対称移動させた領域になる。

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ のとき $x+y \leqq 1$ であるから，D は次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



D は O について点対称な領域であるから，Q の O に関する対称点を Q′ とすると，Q′ も D 全体を動く。

このとき，

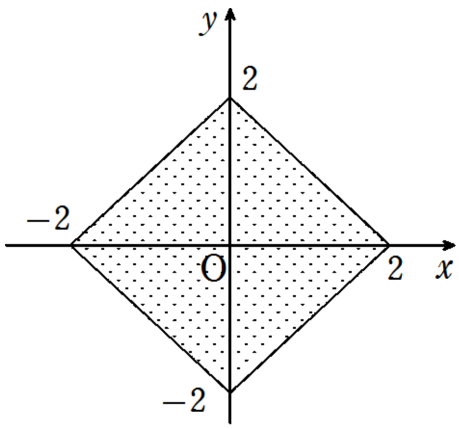
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

となるから，P を固定すると R の動く範囲は

P が中心となるように D を平行移動させた領域

になる。

よって，P が D 全体を動くと，E は次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



(2) $\mathrm{A}(a, b)$ とおく。

F は D を中心が O から A に移るように平行移動した領域なので，

S が F 内の点であるとは，

ある D 内の点 P を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とかけること

である。

同様に，T が F 内の点であるとは，

ある D 内の点 Q を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をかけること

であるから，(1)の点 R を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OU}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$

となる。

したがって，R の動く領域 E と U の動く領域 G は一致する。