［ 東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{3}$ ］

正八角形の頂点を反時計回りにA, B, C, D, E, F, G, Hとする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインがある。

点Pが最初に点Aにある。次の操作を10回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点Pを反時計回りに隣接する頂点に移動させ，
裏が出れば点Pを時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点Pが点Hにある状態で，投げたコインの表が出れば点Aに移動させ，裏が出れば点Gに移動させる。

以下の事象を考える。

事象S：操作を10回行った後に点Pが点Aにある。

事象T：1回目から10回目の操作によって，点Pは少なくとも1回，点Fに移動する。

(1) 事象Sが起こる確率を求めよ。

(2) 事象Sと事象Tがともに起こる確率を求めよ。

コインの表裏の出方は2^{10}通りあり，これらは同様に確からしい。

(1) 表がk回，裏が$10-k$回出たとすると，点PはAから時計回りに

$$k-(10-k)=2k-10$$

だけ進んだ頂点に達する。

Sが起こるとは，$2k-10$が8の倍数になることと同値であり，$k=1, 5, 9$ のときである。

よって求める確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}}=\frac{10+252+10}{2^{10}}=\frac{17}{64}$$

(2)（ⅰ）$k=1, 9$ で S が起こるとき

正八角形を時計回りまたは反時計回りに 1 周して A に戻るため，点 P は必ず F を通過する。

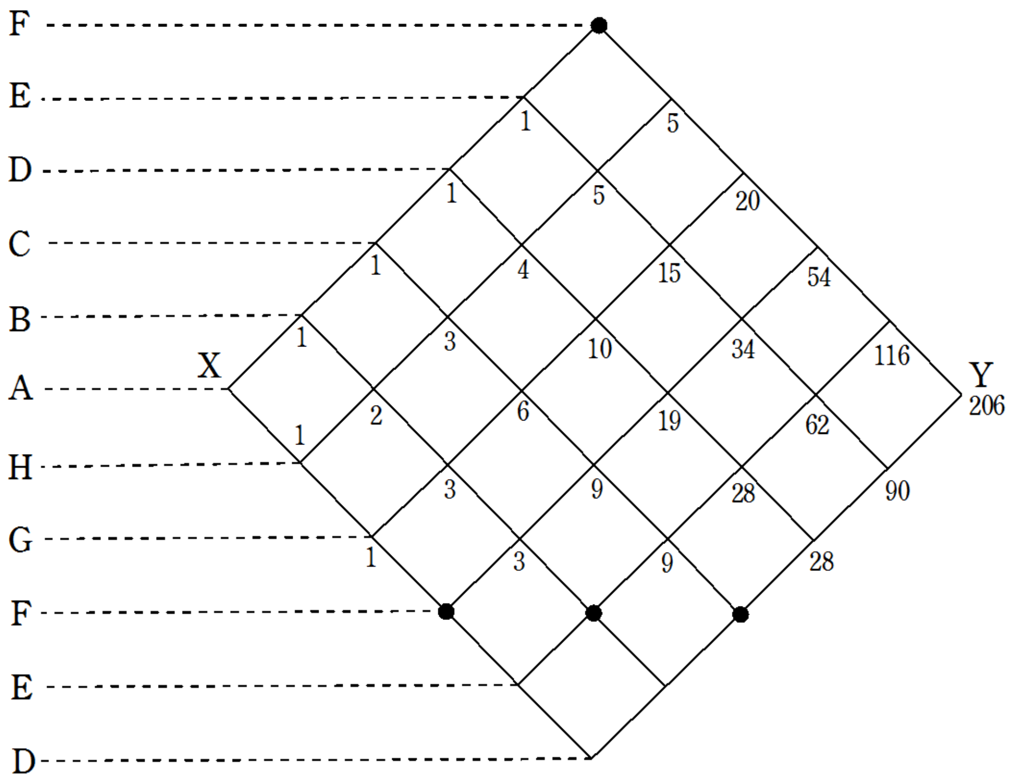
(1)より，これはそれぞれ 10 通りずつある。

（ⅱ）$k=5$ で S が起こるとき

反時計回りに進むことを↗，時計回りに進むことを↘とし，

図のような格子を X から Y まで最短経路で進むことと対応させて考える。

点 F に対応するのは，●印の点である。



●印の 4 点をいずれも通らない経路の数は図より 206 通りあるから

F を少なくとも 1 回通る経路の数は $252-206=46$ 通りある。

よって求める確率は

$$\frac{10+46+10}{2^{10}}=\frac{33}{512}$$