[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{2}$]

Oを原点とする座標平面において，点A(2, 2)を通り，線分OAと垂直な直線をℓとする。座標平面上を点P(p, q)が次の2つの条件をみたしながら動く。

条件１：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件２：点Oと直線ℓの距離をcとし，点P(p, q)と直線ℓの距離をdとするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，Pが動く領域をDとする。さらに，x軸の正の部分と線分OPのなす角をθとする。

(1) Dを図示し，その面積を求めよ。

(2) $\cos\theta$のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 2) \cdot (p,\ q) = 2p + 2q$

条件１より $8 \leqq 2p + 2q \leqq 17 \iff 4 \leqq p + q \leqq \dfrac{17}{2}$ …①

また，$c = \mathrm{OA} = 2\sqrt{2}$であり，$\ell$：$x + y = 4$ と①より

$$d = \frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

となる。よって，

$$cd = 2\sqrt{2} \cdot \frac{p+q-4}{\sqrt{2}} = 2(p+q-4)$$

となり，これと条件２より

$$2(p+q-4) \geqq (p-1)^2 \iff q \geqq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2}$$

となる。ここで，$C: y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{9}{2}$ とおくと，Cと$\ell: x + y = 4$は

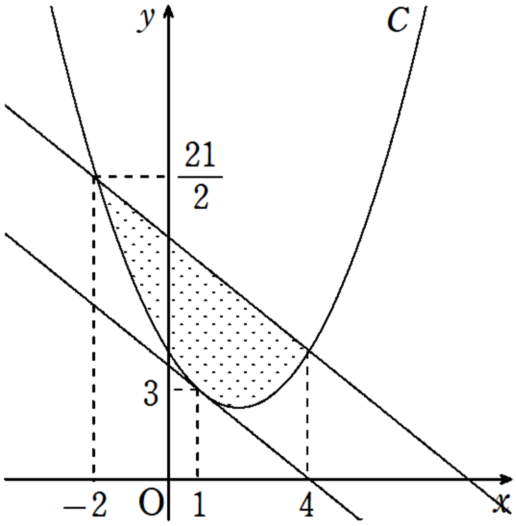
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} - (-x+4) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

より，$x = 1$で接する。また，Cと$x + y = \dfrac{17}{2}$は

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} - \left(\frac{17}{2} - x\right) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$$

より，$x = -2,\ 4$で交わる。

以上より，D は次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



また，D の面積は

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(\frac{17}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx=\int_{-2}^{4}\left\{\left(\frac{17}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3$$

$$=18$$

となる。

（2）まず，直線 $y=mx$ が C と接する m および接点の x 座標を求める。

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=mx \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2(m+2)x+9=0$$

が重解をもつのは，判別式を考えて $(m+2)^2-9=0$ より $m=-5,\ 1$ のときで，

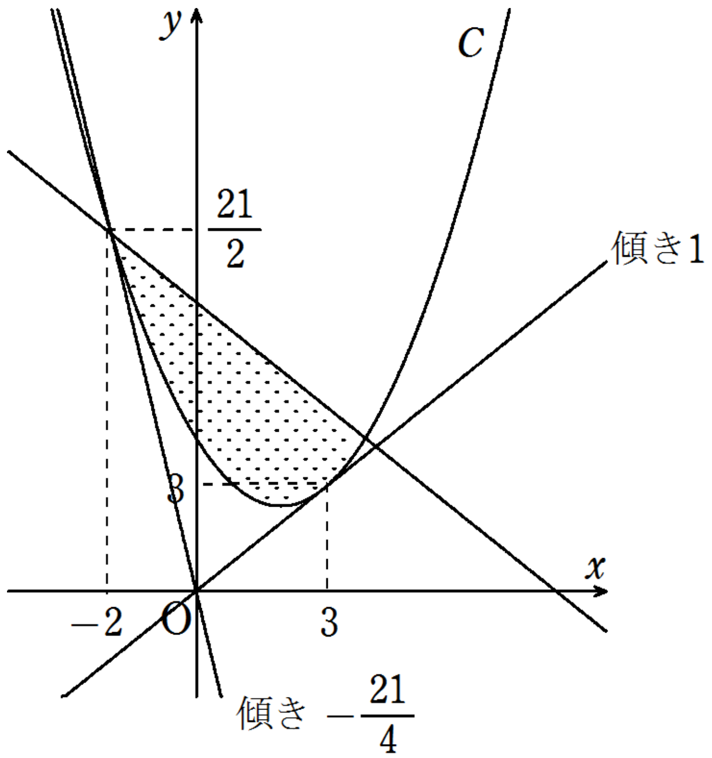
それぞれの場合の重解は $x=-3, 3$ である。

次に，$\cos\theta$ が最大となるのは θ が最小となるときであるから，

$\mathrm{P}(3, 3)$ のときの $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$\cos\theta$ が最小となるのは θ が最大となるときであるから，

$\mathrm{P}\left(-2, \dfrac{21}{2}\right)$ のときの $\cos\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{2^2+\left(\dfrac{21}{2}\right)^2}}=-\dfrac{4}{\sqrt{457}}$ である。



したがって，求める $\cos\theta$ のとりうる値の範囲は

$$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$