[東京大学 2019 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面上の原点を O とし， O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) を辺の長さが1の正方形の頂点とする。

3点 $\mathrm{P}(p, 0)$ $\mathrm{Q}(0, q)$, $\mathrm{R}(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり，

3点 O, P, Q および3点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し， p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

$\mathrm{OP}=p,\ \mathrm{OQ}=q,\ \mathrm{CR}=r$ とおく。

3点 P, Q, R はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあるから，

$0 \leqq p \leqq 1$ かつ $0 \leqq q \leqq 1$ かつ $0 \leqq r \leqq 1$ …①

また，△OPQ の面積が $\dfrac{1}{3}$ であることから

$\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}$ …②

さらに，△PQR の面積が $\dfrac{1}{3}$ であることから

台形OPRC − {△OPQ + △CQR} $=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(1-q)r\right\}=\dfrac{1}{3}$

したがって $p+qr=\dfrac{4}{3}$ …③

②より $p \neq 0$ であるから $q=\dfrac{2}{3p}$ …④

これを③に代入して $p+\dfrac{2}{3p}r=\dfrac{4}{3}$ より $r=-\dfrac{3}{2}p^2+2p$ …⑤

$p \neq 0$ と①，④，⑤より

$0<p \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{2}{3p} \leqq 1$ かつ $0 \leqq \dfrac{p(4-3p)}{2} \leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ …⑥ かつ $0 \leqq -3p^2+4p \leqq 2$ …⑦

となるが，⑥のとき， $-3p^2+4p=-3\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ より $1 \leqq -3p^2+4p \leqq \dfrac{4}{3}$ であるから

⑥かつ⑦　$\Leftrightarrow$　⑥：$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$　であり，これが p のとり得る値の範囲である。

このとき

$q=\dfrac{2}{3p}$　より　$\dfrac{2}{3} \leqq q \leqq 1$

$r=-\dfrac{3}{2}p^2+2p=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$　より　$\dfrac{1}{2} \leqq r \leqq \dfrac{2}{3}$

である。

(2)　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{r}{q}=\dfrac{\dfrac{p(4-3p)}{2}}{\dfrac{2}{3p}}=\dfrac{3p^2(4-3p)}{4}=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$　であり，

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$　とおくと

$f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^3=-\dfrac{3}{4}p(9p-8)$　より

$f(p)$の増減は下表に従う。

p	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\dfrac{2}{3}$	↗	$\dfrac{64}{81}$	↘	$\dfrac{3}{4}$

よって，　$f(p)$すなわち$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$の最大値は　$\dfrac{64}{81}$，最小値は　$\dfrac{2}{3}$