[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{1}$]

関数

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad （0<x<\pi）$$

の増減表をつくり， $x\to+0$， $x\to\pi-0$ のときの極限を調べよ。

$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x$$

$$=\frac{\sin x(1-\sin^2 x)-x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cos^2 x-x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos x(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$$

ここで， $0<x<\pi$ において $\sin 2x<2x$ であるから

$f'(x)=0$ となるのは $\cos x=0$ より $x=\dfrac{\pi}{2}$ のときのみ。

よって， $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また， $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=1+1=2$

$x\to\pi-0$ のとき， $\dfrac{x}{\sin x}\to\infty$, $\cos x\to-1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\pi-0} f(x)=\infty$

[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{2}$]

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

(1) $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!}}{n!} = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}$ であるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}}{\dfrac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2\cdot n!}} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\cdot n!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)\cdot 2n}{n^2(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

ここで，$2n+1$ と n について $1\cdot(2n+1)+2\cdot n=1$ と表せるので，これらは互いに素である。

同様に，$2n+1$ と $n+1$ について $2\cdot(n+1)-1\cdot(2n+1)=1$ と表せるので，これらは互いに素である。

したがって，$2n+1$ と $n(n+1)$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であり，2 で割り切れるので，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数。

よって $\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ は 2 でのみ約分できて $\dfrac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$ となる。

したがって，$p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，$q_n = 2n+1$ …①

(2) $a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!} = 3$

②より $a_2 = a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1} = a_1\cdot\dfrac{p_2}{p_1} = 3\cdot\dfrac{5}{3} = 5$

$n \geqq 3$ のとき $a_n = a_2\cdot\dfrac{q_3}{p_3}\cdots\cdots\cdots\dfrac{q_n}{p_n} = 5\cdot\dfrac{q_3}{p_3}\cdots\cdots\cdots\dfrac{q_n}{p_n}$ …②

②の分子はすべて奇数であるが，①より分母にある $p_3=6$ は偶数になり，a_n は整数にならない。

よって，求める n は $n=1, 2$

[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{3}$]

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。

座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，

点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k\to+0}S(k),\ \lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で定まる点 T についての軌跡を求める。

$\mathrm{T}(X,\ Y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ であるから，$\mathrm{P}\left(kX,\ kY\right)$

よって，点 P が C 上にあるための条件は

$$kY=\left(kX\right)^2\quad\left(-1\leqq kX\leqq 1\right)$$

したがって　$Y=kX^2\quad\left(-\frac{1}{k}\leqq X\leqq\frac{1}{k}\right)$　となる。

以上より，点 T の軌跡は，放物線 $y=kx^2\quad\left(-\frac{1}{k}\leqq x\leqq\frac{1}{k}\right)$

この軌跡を D とする。

点 Q が線分 OA 上を動くので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　（$0\leqq\ell\leqq 1$）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+k\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (0\leqq k\ell\leqq k)$$

となるので，R の動く領域は，D が x 軸の正方向に k だけ平行移動する際に通過する領域である。

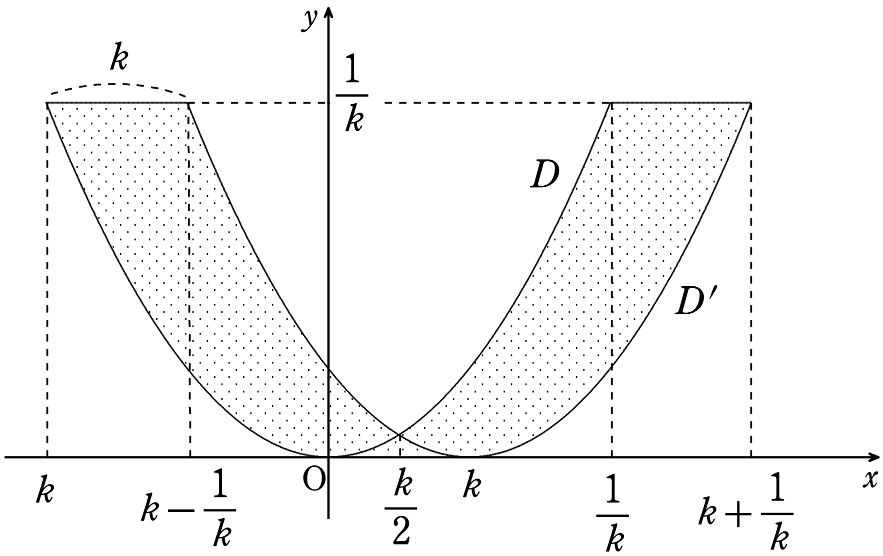
D を x 軸の正方向に k だけ平行移動させたものを D' とすると

$$D'\ :\ y=k(x-k)^2\quad\left(k-\frac{1}{k}\leqq x\leqq k+\frac{1}{k}\right)$$

ここで，$k-\dfrac{1}{k}$ と $\dfrac{1}{k}$ の大小で場合分けをする。

（ｉ）$\dfrac{1}{k} \geqq k-\dfrac{1}{k}$ すなわち $0<k\leqq\sqrt{2}$ のとき

点 R が動く領域は図の打点部分になる。



D と D' は $x=\dfrac{k}{2}$ で交わっており，

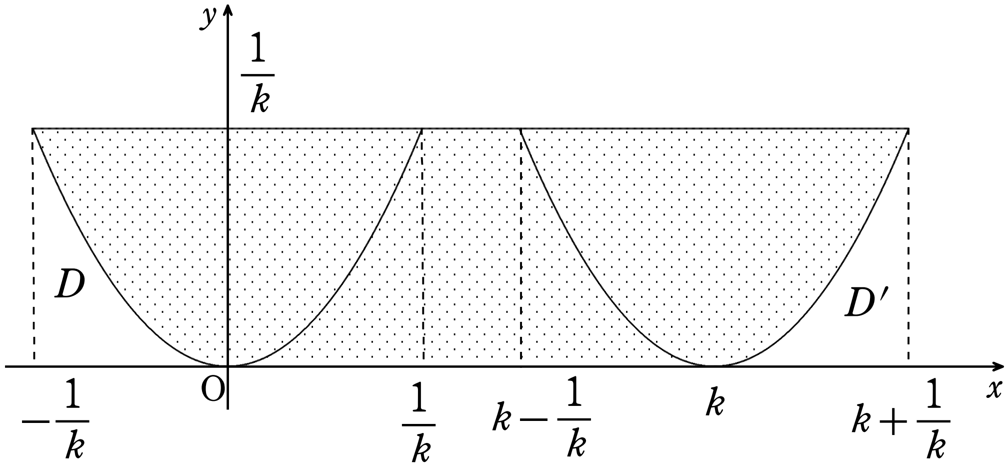
D の $-\dfrac{1}{k}\leqq x\leqq 0$ と $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{k}$ の部分が通過する領域の面積はいずれも1である、

さらに，これらの共通部分の面積は $2\displaystyle\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx=\left[\dfrac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{k}{2}}=\dfrac{k^4}{12}$ であるから

$S(k)=2-\dfrac{k^4}{12}$ となり，このとき $\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)=2$ を得る。

（ii）$\dfrac{1}{k}\leqq k-\dfrac{1}{k}$ すなわち $k\geqq\sqrt{2}$ のとき

点 R が動く領域は図の打点部分になる。



よって， $S(k)=\frac{1}{k}\cdot k+2\int_{-\frac{1}{k}}^{0}\left(\frac{1}{k}-kx^2\right)dx$

$$=1+2\left[\frac{1}{k}x-\frac{k}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{k}}^{0}$$

$$=1-2\left(-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3k^2}\right)$$

$$=1+\frac{4}{3k^2}$$

このとき $\lim_{k\to\infty}S(k)=1$

[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。次の２条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１： $f(x)=b$ は相異なる３実数解をもつ。

条件２：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

(1) $f(x)=x^3-3a^2x$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$ より， $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$0<a\leqq 1$ のとき， $f(x)$ は $x\geqq 1$ で単調増加であり，

方程式 $f(x)=b$ の1より大きい実数解の個数は，1個または0個となる。

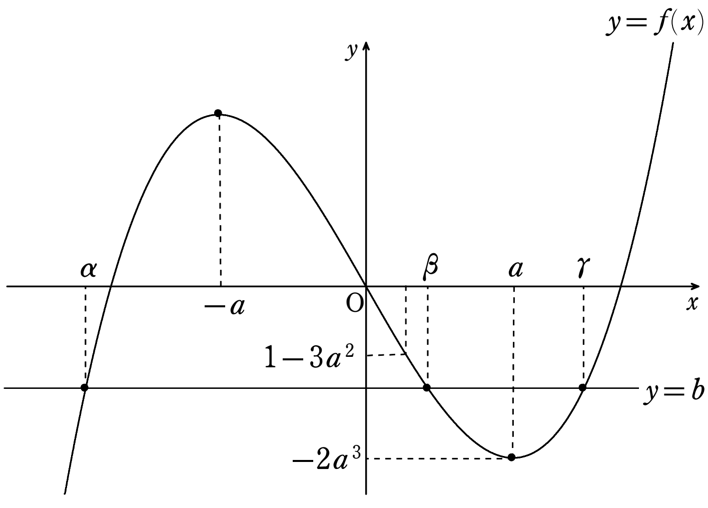
したがって， $a>1$ であることが必要である。

さらに， $f(x)=b$ が相異なる３実数解をもち，

２番目に小さいものが1より大きくなるのは

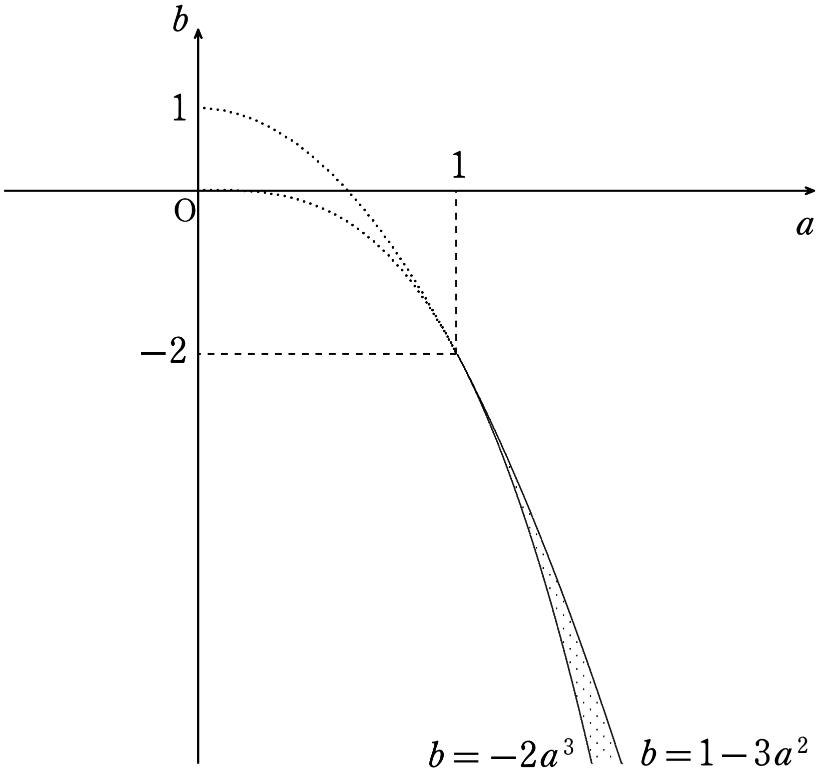
$$f(a)<b<f(1)$$

を満たすときである。



よって，$-2a^3 < b < 1-3a^2$ となるときであり，

これを図示すると下図の打点部分である。ただし，境界は含まない。



[**東京大学 2018 年前期 理科** $\boxed{5}$]

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円をCとする。点$\mathrm{P}(z)$はC上にあり，

点$\mathrm{A}(1)$とは異なるとする。点Pにおける円Cの接線に関して，点Aと対称な点を$\mathrm{Q}(u)$とする。

$w=\dfrac{1}{1-u}$とおき，wと共役な複素数を$\overline{w}$で表す。

(1) uと$\dfrac{\overline{w}}{w}$をzについての整式として表し，絶対値の商$\dfrac{\left|w+\overline{w}-1\right|}{|w|}$を求めよ。

(2) Cのうち実部が$\dfrac{1}{2}$以下の複素数で表される部分をC'とする。

点$\mathrm{P}(z)$がC'上を動くときの点$\mathrm{R}(w)$の軌跡を求めよ。

(1) 原点を中心とする回転移動で，$\mathrm{P}(z)$を点iに移すものを考える。

この回転移動は，複素数$\dfrac{i}{z}$をかけることで得られる。

この回転移動によって$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{A}, \ell$が$\mathrm{P}', \mathrm{Q}', \mathrm{A}', \ell'$に移るものとする。

ℓに関してQとAが対称であるから，ℓ'に関してQ'とA'が対称である。

$\mathrm{P}'(i)$での接線ℓ'は実軸と平行であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}$に対応する複素数$\dfrac{i}{z}(u-z)$と$\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{A}'}$に対応する複素数$\dfrac{i}{z}(1-z)$が

共役複素数になるので

$$\frac{i}{z}(u-z)=\overline{\frac{i}{z}(1-z)} \quad \cdots①$$

$|z|^2=1$ より $z\overline{z}=1$ であるから①は

$$① \Leftrightarrow \frac{i}{z}(u-z)=\frac{-i}{\overline{z}}\left(1-\overline{z}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{z}(u-z)=-z\left(1-\overline{z}\right) \Leftrightarrow u-z=-z^2\left(1-\overline{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow u=-z^2+z^2\overline{z}+z=-z^2+2z \quad \text{となる。}$$

また，このとき

$$w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-(-z^2+2z)}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

であるから

$$\frac{\overline{w}}{w}=\frac{(z-1)^2}{(\overline{z}-1)^2}=\frac{(z-1)^2}{\left(\dfrac{1}{z}-1\right)^2}=z^2$$

となり

$$\frac{w+\overline{w}+1}{w}=1+\frac{\overline{w}}{w}+\frac{1}{w}=1+z^2-(z-1)^2=2z$$

したがって

$$\frac{|w+\overline{w}+1|}{|w|}=\left|\frac{w+\overline{w}+1}{w}\right|=|2z|=2$$

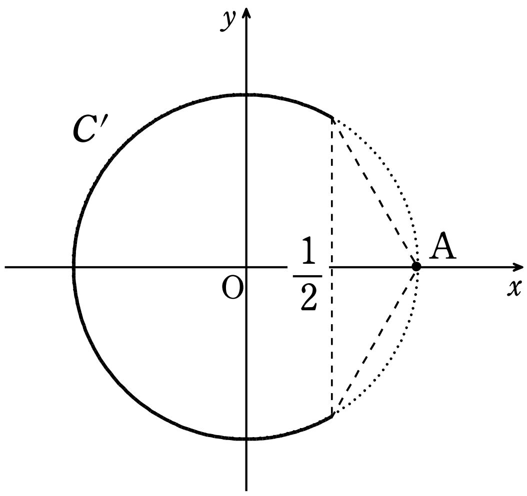
(2) (1)より $|w+\overline{w}+1|=2|w|$ …② である。

$w=x+yi$ とおくと

② $\Leftrightarrow$ $|2x-1|=2\sqrt{x^2+y^2}$ $\Leftrightarrow$ $(2x-1)^2=4(x^2+y^2)$

よって $x=-y^2+\dfrac{1}{4}$

次に，軌跡の限界について考える。



$z-1$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に対応する複素数であり，

P が C' 上を動くとき，$\arg(z-1)$ の範囲は

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1)\leqq \frac{4}{3}\pi$$

である。

$w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ であるから $\arg w=-2\arg(z-1)$

であるので，

$$-\frac{8}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{4}{3}\pi$$

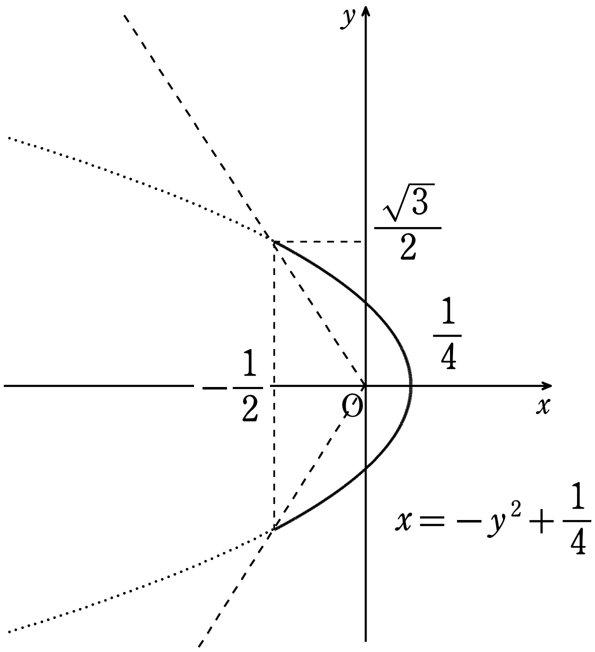
となり，

$$-\frac{2}{3}\pi \leqq \arg w \leqq \frac{2}{3}\pi$$

である。

したがって，求める軌跡は

放物線　$x=-y^2+\dfrac{1}{4}$　$\left(x \geqq -\dfrac{1}{2}\right)$



[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標空間内の点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) を考える。

$\frac{1}{2}<r<1$ とする。点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y=t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3) r は(2)の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は(2)の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

---

(1) $y=t$ が V_1，V_3 とそれぞれが共有点をもつような t の値の範囲は

$-r \leqq t \leqq r$，$1-r \leqq t \leqq 1+r$

である。

$\frac{1}{2}<r<1$ のとき，$-r<1-r<r<1+r$ であるから

求める t の値の範囲は $1-r \leqq t \leqq r$ となる。

そして，$y=t$ と V_1 の共通部分は，

半径 $\sqrt{r^2-t^2}$ の円が平行移動するときの通過領域であり，

$y=t$ と V_3 の共通部分は，

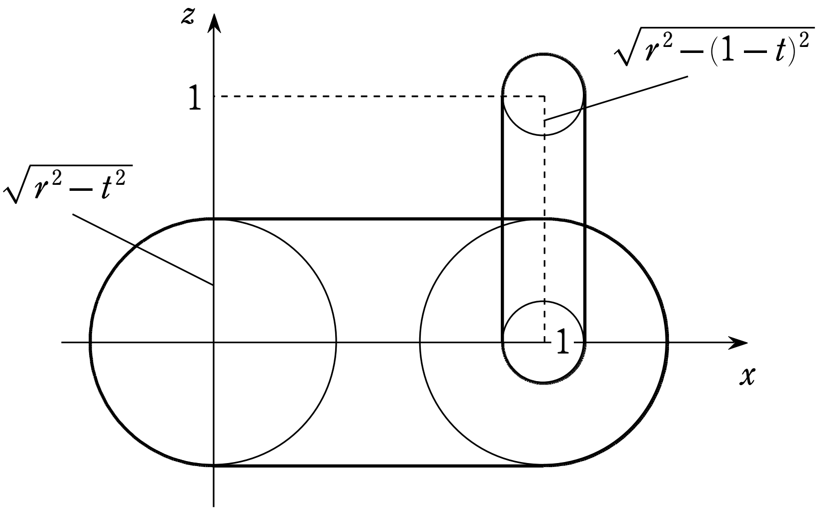
半径 $\sqrt{r^2-(1-t)^2}$ の円が平行移動するときの通過領域である。

また，$\sqrt{r^2-t^2}$ と $\sqrt{r^2-(1-t)^2}$ の大小は，$t=\frac{1}{2}$ を境に入れ替わるので

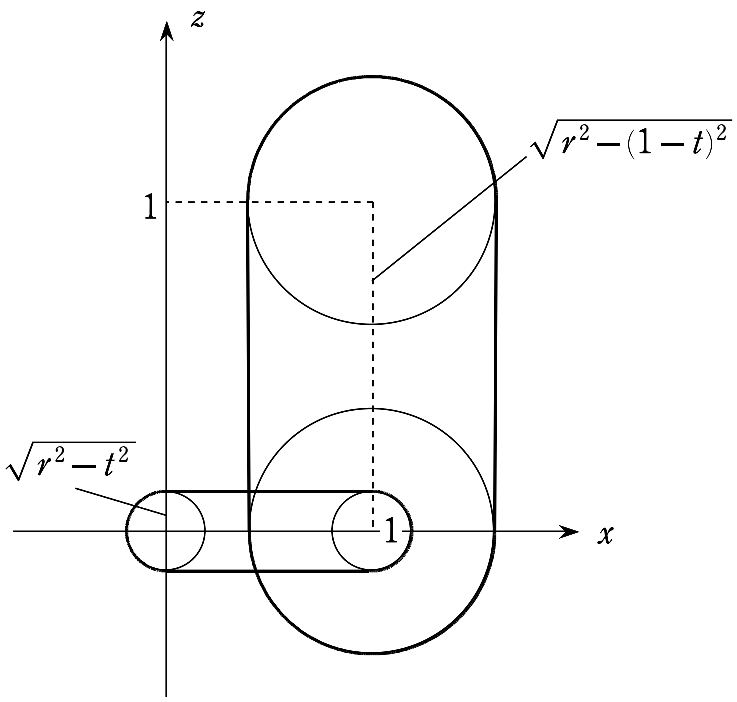
平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を図示すると

次の図のようになる。

$1-r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

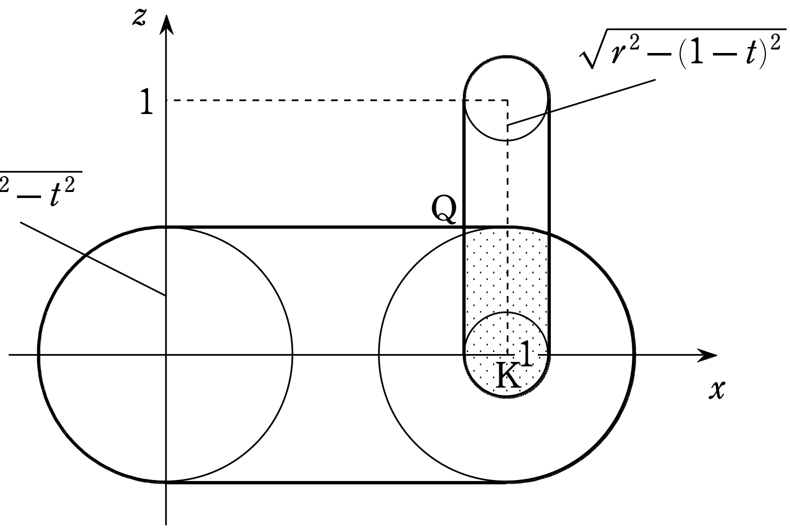


$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき

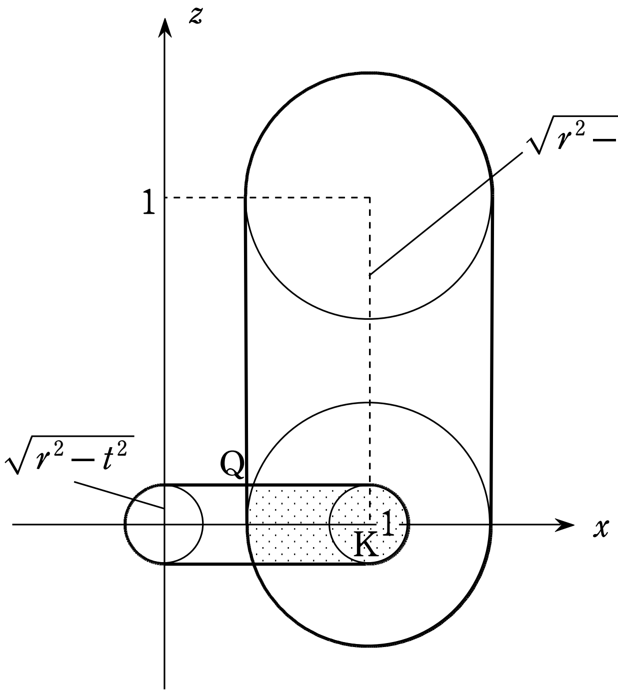


（2）$y=t$ による V_1 と V_3 の切り口は，次の図の打点部分である。

$1-r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき



$\mathrm{K}(1,\ t,\ 0)$ と Q の距離の 2 乗は

$$(r^2-t^2)+\{r^2+(1-t)^2\}=2r^2-(2t^2-2t+1)$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2r^2-\frac{1}{2}$$

となり，この最大値は t と $\dfrac{1}{2}$ の大小に関係なく $2r^2-\dfrac{1}{2}$ である。

また，$y=t$ によるV_2 の切り口はK中心，半径 r の円であるから，

V_1 と V_3 の共通部分がV_2 に含まれるための条件は

$$2r^2-\frac{1}{2}\leqq r^2$$

であり，$\frac{1}{2}<r<1$ と合わせて $\frac{1}{2}<r\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

(3) V_n （$n=1, 2, 3$）の体積を$v(V_n)$ と表すものとする。

$$v(V_1\cup V_2\cup V_3)=v(V_1)+v(V_2)+v(V_3)-v(V_1\cap V_2)-v(V_2\cap V_3)-v(V_3\cap V_1)+v(V_1\cap V_2\cap V_3)$$

であり，(2)より $v(V_3\cap V_1)=v(V_1\cap V_2\cap V_3)$

さらに，$v(V_1)=v(V_2)=v(V_3)=S$，$v(V_1\cap V_2)=v(V_2\cap V_3)=T$ であるから

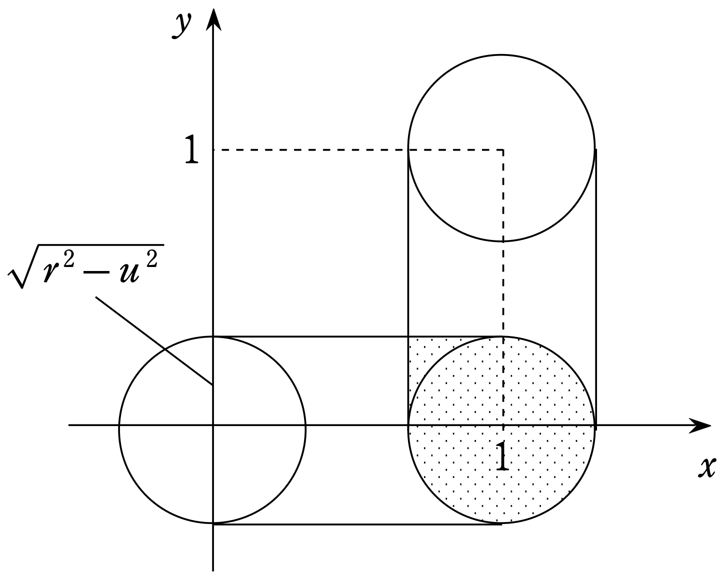
$$v(V_1\cup V_2\cup V_3)=3S-2T$$

(4) V_1 は，底面の半径 r，高さ1の円柱と半径 r の半球を２つ合わせた図形であるから

$$S=\pi r^2\cdot 1+\frac{4}{3}\pi r^3=\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$$

また，V_1, V_2 を平面 $z=u$ （$-r\leqq u\leqq r$）で切ったときの共通部分の面積を$W(u)$ とする。

$W(u)$ は半径 $\sqrt{r^2-u^2}$ の円を平行移動したもの同士の共通部分である。



よって

$$W(u) = \sqrt{r^2 - u^2}^2 + \pi\sqrt{r^2 - u^2}^2 \cdot \frac{3}{4} = \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)\left(r^2 - u^2\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^{r} W(u)\,du \\ &= 2\int_0^r \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)\left(r^2 - u^2\right)du \\ &= 2\left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)\left[r^2 u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^r \\ &= 2\left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)\cdot\frac{2}{3}r^3 \\ &= \left(\frac{4}{3} + \pi\right)r^3 \end{aligned}$$

したがって, V の体積は

$$\begin{aligned} 3S - 2T &= 3\left(\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3\right) - 2\left(\frac{4}{3} + \pi\right)r^3 \\ &= 3\pi r^2 + \left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3 \end{aligned}$$