[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標空間内の点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) を考える。

$\dfrac{1}{2}<r<1$とする。点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれV_1, V_2, V_3とする。

(1) 平面 $y=t$ がV_1, V_3双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ とV_1の共通部分および，平面 $y=t$ とV_3の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1とV_3の共通部分がV_2に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3) r は(2)の条件をみたすとする。V_1の体積を S とし，V_1とV_2の共通部分の体積を T とする。V_1, V_2, V_3を合わせて得られる立体V の体積を S と T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は(2)の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

(1) $y=t$ がV_1，V_3とそれぞれが共有点をもつような t の値の範囲は

$-r\leqq t\leqq r$，$1-r\leqq t\leqq 1+r$

である。

$\dfrac{1}{2}<r<1$のとき，$-r<1-r<r<1+r$ であるから

求める t の値の範囲は $1-r\leqq t\leqq r$ となる。

そして，$y=t$ とV_1の共通部分は,

半径$\sqrt{r^2-t^2}$の円が平行移動するときの通過領域であり,

$y=t$ とV_3の共通部分は,

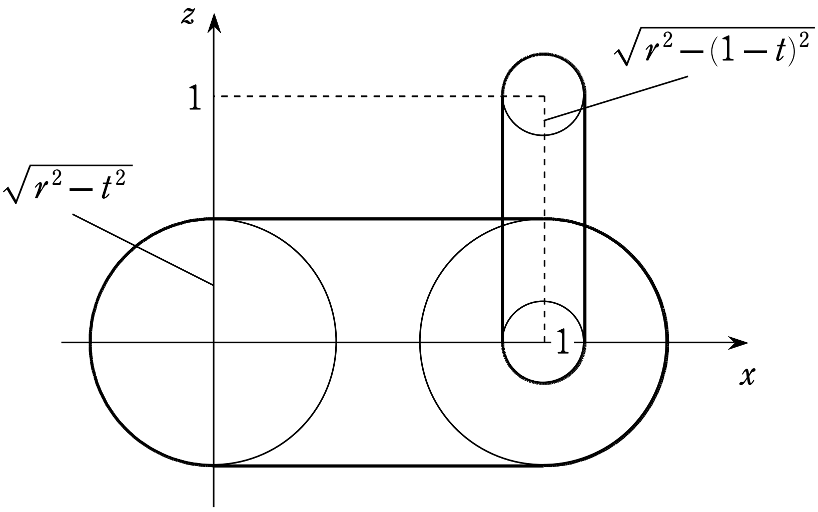
半径$\sqrt{r^2-(1-t)^2}$の円が平行移動するときの通過領域である。

また，$\sqrt{r^2-t^2}$ と$\sqrt{r^2-(1-t)^2}$の大小は，$t=\dfrac{1}{2}$を境に入れ替わるので

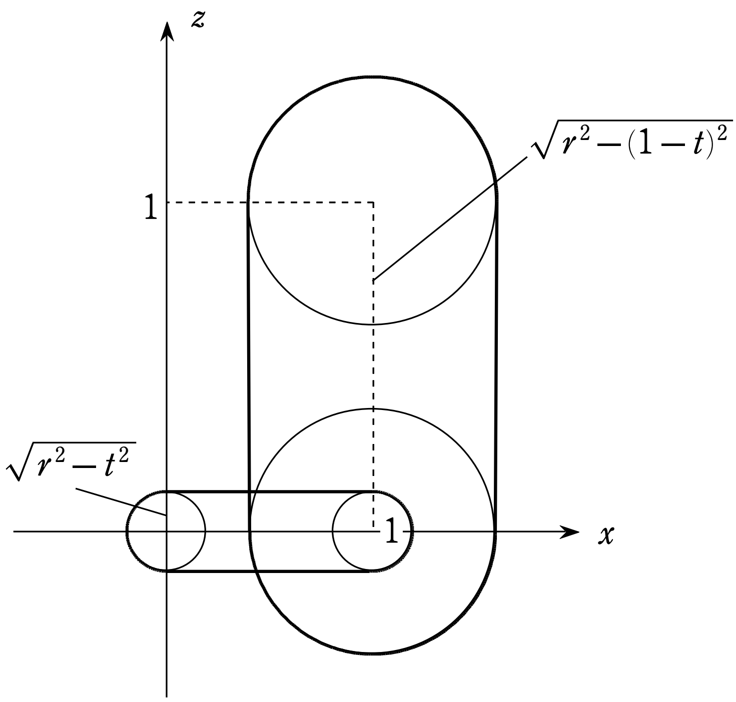
平面 $y=t$ とV_1の共通部分および，平面 $y=t$ とV_3の共通部分を図示すると

次の図のようになる。

$1-r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

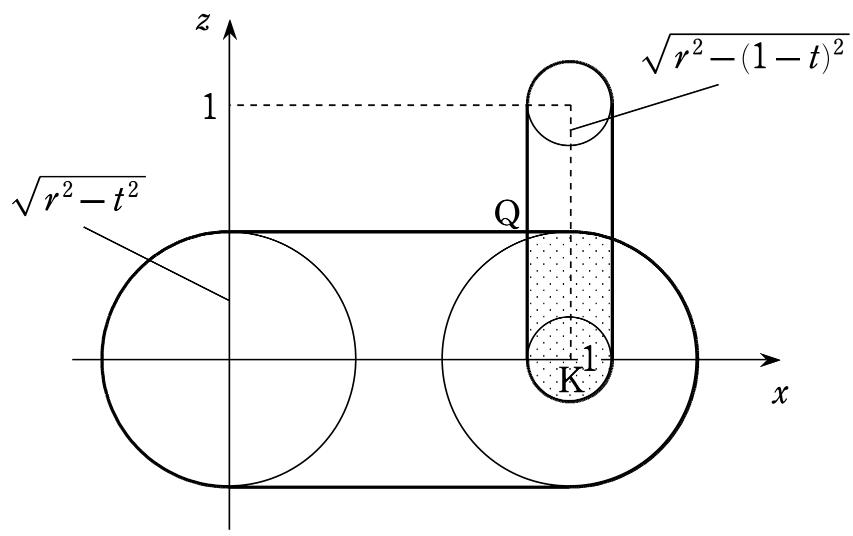


$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき

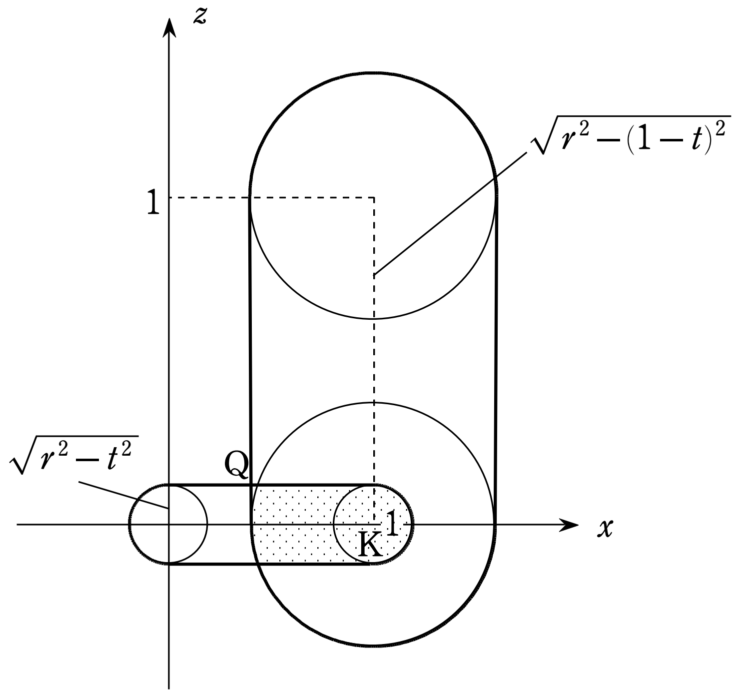


（2）$y=t$ による V_1 と V_3 の切り口は，次の図の打点部分である。

$1-r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき



K$(1,\ t,\ 0)$ と Q の距離の 2 乗は

$$(r^2-t^2)+\{r^2+(1-t)^2\}=2r^2-(2t^2-2t+1)$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2r^2-\frac{1}{2}$$

となり，この最大値は t と $\dfrac{1}{2}$ の大小に関係なく $2r^2-\dfrac{1}{2}$ である。

また，$y=t$ による V_2 の切り口はK中心，半径 r の円であるから，

V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための条件は

$$2r^2-\frac{1}{2}\leqq r^2$$

であり，$\frac{1}{2}<r<1$ と合わせて $\frac{1}{2}<r\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

(3) V_n （$n=1, 2, 3$）の体積を $v(V_n)$ と表すものとする。

$$v\left(V_1\cup V_2\cup V_3\right)=v\left(V_1\right)+v\left(V_2\right)+v\left(V_3\right)-v\left(V_1\cap V_2\right)-v\left(V_2\cap V_3\right)-v\left(V_3\cap V_1\right)+v\left(V_1\cap V_2\cap V_3\right)$$

であり，(2)より $v\left(V_3\cap V_1\right)=v\left(V_1\cap V_2\cap V_3\right)$

さらに，$v\left(V_1\right)=v\left(V_2\right)=v\left(V_3\right)=S$，$v\left(V_1\cap V_2\right)=v\left(V_2\cap V_3\right)=T$ であるから

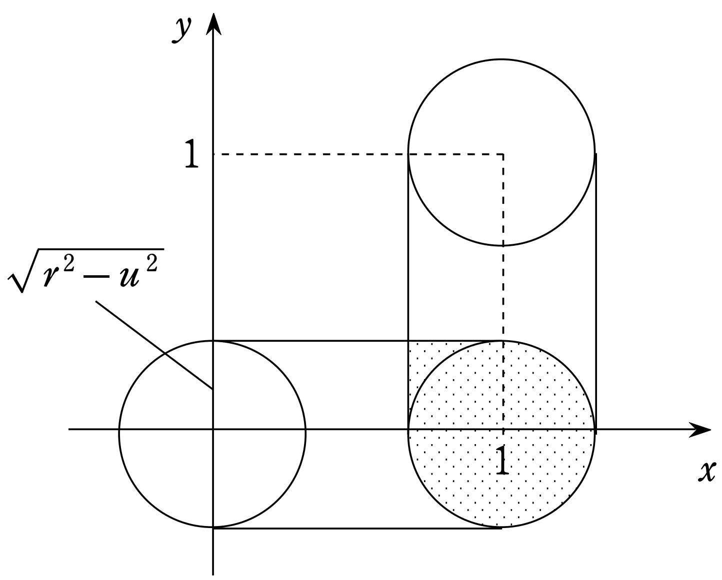
$$v\left(V_1\cup V_2\cup V_3\right)=3S-2T$$

(4) V_1 は，底面の半径 r，高さ1の円柱と半径 r の半球を2つ合わせた図形であるから

$$S=\pi r^2\cdot 1+\frac{4}{3}\pi r^3=\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$$

また，V_1, V_2 を平面 $z=u$ （$-r\leqq u\leqq r$）で切ったときの共通部分の面積を $W(u)$ とする。

$W(u)$ は半径 $\sqrt{r^2-u^2}$ の円を平行移動したもの同士の共通部分である。



よって

$$W(u)=\sqrt{r^2-u^2}^{\,2}+\pi\sqrt{r^2-u^2}^{\,2}\cdot\frac{3}{4}=\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\left(r^2-u^2\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}T&=\int_{-r}^{r}W(u)\,du\\&=2\int_0^r\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\left(r^2-u^2\right)du\\&=2\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\left[r^2u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^r\\&=2\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\cdot\frac{2}{3}r^3\\&=\left(\frac{4}{3}+\pi\right)r^3\end{aligned}$$

したがって，V の体積は

$$\begin{aligned}3S-2T&=3\left(\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3\right)-2\left(\frac{4}{3}+\pi\right)r^3\\&=3\pi r^2+\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)r^3\end{aligned}$$