

[東京大学 2018 年前期 理科 4]

$a > 0$ とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の2条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件1 : $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ。

条件2 : さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

(1) $f(x) = x^3 - 3a^2x$

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$ より、 $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	...	$-a$...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$0 < a \leq 1$ のとき、 $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加であり、

方程式 $f(x) = b$ の1より大きい実数解の個数は、1個または0個となる。

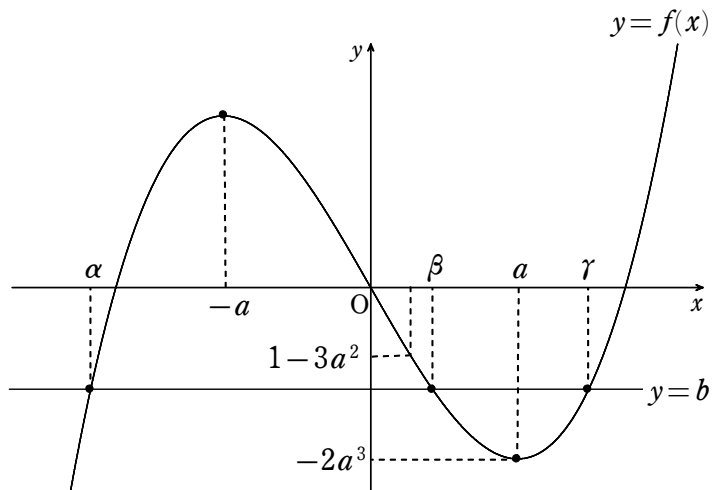
したがって、 $a > 1$ であることが必要である。

さらに、 $f(x) = b$ が相異なる3実数解をもち、

2番目に小さいものが1より大きくなるのは

$$f(a) < b < f(1)$$

を満たすときである。



よって、 $-2a^3 < b < 1-3a^2$ となるときであり、

これを図示すると下図の打点部分である。ただし、境界は含まない。

