[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{3}$]

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。

座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，

点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k\to+0}S(k)$, $\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で定まる点 T についての軌跡を求める。

$\mathrm{T}(X,\ Y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ であるから，$\mathrm{P}(kX,\ kY)$

よって，点 P が C 上にあるための条件は

$$kY=(kX)^2 \quad (-1\leqq kX\leqq 1)$$

したがって　$Y=kX^2 \quad \left(-\frac{1}{k}\leqq X\leqq\frac{1}{k}\right)$　となる。

以上より，点 T の軌跡は，放物線 $y=kx^2 \quad \left(-\frac{1}{k}\leqq x\leqq\frac{1}{k}\right)$

この軌跡を D とする。

点 Q が線分 OA 上を動くので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　（$0\leqq\ell\leqq 1$）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+k\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (0\leqq k\ell\leqq k)$$

となるので，R の動く領域は，D が x 軸の正方向に k だけ平行移動する際に通過する領域である。

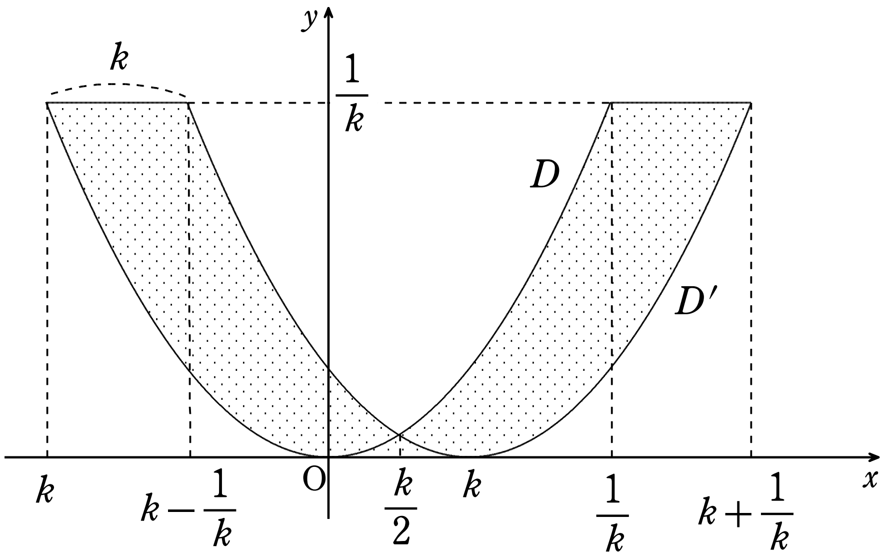
D を x 軸の正方向に k だけ平行移動させたものを D' とすると

$$D' : y=k(x-k)^2 \quad \left(k-\frac{1}{k}\leqq x\leqq k+\frac{1}{k}\right)$$

ここで，$k-\dfrac{1}{k}$ と $\dfrac{1}{k}$ の大小で場合分けをする。

（ｉ）$\dfrac{1}{k} \geqq k-\dfrac{1}{k}$ すなわち $0<k \leqq \sqrt{2}$ のとき

点 R が動く領域は図の打点部分になる。



D と D' は $x=\dfrac{k}{2}$ で交わっており，

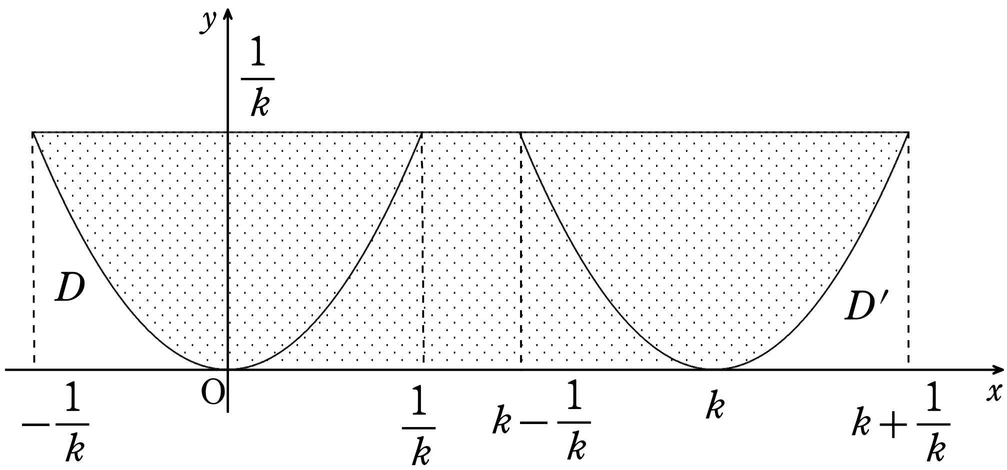
D の $-\dfrac{1}{k} \leqq x \leqq 0$ と $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{k}$ の部分が通過する領域の面積はいずれも1である、

さらに，これらの共通部分の面積は $2\displaystyle\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{k}{2}}=\frac{k^4}{12}$ であるから

$S(k)=2-\dfrac{k^4}{12}$ となり，このとき $\displaystyle\lim_{k\to+0} S(k)=2$ を得る。

（ii）$\dfrac{1}{k} \leqq k-\dfrac{1}{k}$ すなわち $k \geqq \sqrt{2}$ のとき

点 R が動く領域は図の打点部分になる。



よって，$S(k)=\frac{1}{k}\cdot k+2\int_{-\frac{1}{k}}^{0}\left(\frac{1}{k}-kx^2\right)dx$

$$=1+2\left[\frac{1}{k}x-\frac{k}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{k}}^{0}$$

$$=1-2\left(-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3k^2}\right)$$

$$=1+\frac{4}{3k^2}$$

このとき $\lim_{k\to\infty}S(k)=1$