[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{2}$]

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を

$$a_n=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

---

(1) $a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!}}{n!}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}$ であるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}}{\dfrac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2\cdot n!}}=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\cdot n!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n^2(n+1)}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

ここで，$2n+1$ と n について $1\cdot(2n+1)+2\cdot n=1$ と表せるので，これらは互いに素である。

同様に，$2n+1$ と $n+1$ について $2\cdot(n+1)-1\cdot(2n+1)=1$ と表せるので，これらは互いに素である。

したがって，$2n+1$ と $n(n+1)$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であり，2 で割り切れるので，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数。

よって $\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ は 2 でのみ約分できて $\dfrac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$ となる。

したがって，$p_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$q_n=2n+1$ …①

(2) $a_1=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!}=3$

②より $a_2=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}=a_1\cdot\dfrac{p_2}{p_1}=3\cdot\dfrac{5}{3}=5$

$n \geqq 3$ のとき $a_n=a_2\cdot\dfrac{q_3}{p_3}\cdots\cdots\cdot\dfrac{q_n}{p_n}=5\cdot\dfrac{q_3}{p_3}\cdots\cdots\cdot\dfrac{q_n}{p_n}$ …②

②の分子はすべて奇数であるが，①より分母にある $p_3=6$ は偶数になり，a_n は整数にならない。

よって，求める n は $n=1,\ 2$