[東京大学 2018 年前期 理科 $\boxed{1}$]

関数

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$$

の増減表をつくり， $x\to+0$， $x\to\pi-0$ のときの極限を調べよ。

$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$ より

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1\cdot\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x\\
&=\frac{\sin x(1-\sin^2 x)-x\cos x}{\sin^2 x}\\
&=\frac{\sin x\cos^2 x-x\cos x}{\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}
\end{aligned}$$

ここで， $0<x<\pi$ において $\sin 2x<2x$ であるから

$f'(x)=0$ となるのは $\cos x=0$ より $x=\dfrac{\pi}{2}$ のときのみ。

よって， $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また， $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1+1=2$

$x\to\pi-0$ のとき， $\dfrac{x}{\sin x}\to\infty$, $\cos x\to-1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=\infty$