[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面上に放物線Cを

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域Dを

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める。原点をとおる2直線$\ell,\ m$はCに接するものとする。

(1) 放物線C上を動く点Cと直線$\ell,\ m$の距離をそれぞれ$L,\ M$とする。

$\sqrt{L}+\sqrt{M}$が最小値をとるときの点Aの座標を求めよ。

(2) 次の条件をみたす点$\mathrm{P}(p,\ q)$の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域Dのすべての点$(x,\ y)$に対し，不等式$px+qy \leqq 0$がなりたつ。

直線$y=ax$が$C: y = x^2-3x+4$と接するようなaを求める。

$ax = x^2-3x+4 \iff x^2-(a+3)x+4=0$ の判別式が0になることから

$(a+3)^2-4^2=0$ より $a+3=\pm 4$

よって $a=1,\ -7$

ここで，$\ell: y=x,\ m: y=-7x$ とおく。

(1) $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$とおくと，

$\ell: x-y=0$ であり，点と直線の距離から

$$L = \frac{|t-(t^2-3t+4)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-(t-2)^2|}{\sqrt{2}} = \frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

$m: 7x+y=0$ であり，同様にして

$$M = \frac{|7t+(t^2-3t+4)|}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{|(t+2)^2|}{5\sqrt{2}} = \frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

したがって $\sqrt{L}+\sqrt{M} = \sqrt{\dfrac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}} = 2^{-\frac{1}{4}}\left(|t-2| + \dfrac{1}{\sqrt{5}}|t+2|\right)$

ここで，$f(t) = |t-2| + \dfrac{1}{\sqrt{5}}|t+2|$ とおく。$f(t)$が最小になるとき，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$も最小になる。

（ｉ）$t \leqq -2$ のとき　$f(t)=-(t-2)-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

（ii）$-2 \leqq t \leqq 2$ のとき　$f(t)=-(t-2)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

（iii）$t \geqq 2$ のとき　$f(t)=(t-2)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

それぞれの $f(t)$ は t の１次関数であり，それぞれの傾きは

$$-1-\frac{1}{\sqrt{5}}<0,\ -1+\frac{1}{\sqrt{5}}<0,\ 1+\frac{1}{\sqrt{5}}>0$$

であるから，$f(t)$ は $t=2$ のときに最小となる。

したがって，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ もこのとき最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

（2）D 内の点 $(0,\ 4)$ についても $px+qy \leqq 0$ が成り立つことが必要であるから

$4q \leqq 0 \iff q \leqq 0$

（ｉ）$q=0$ のとき

$px+qy \leqq 0 \iff px \leqq 0$ となるが，D 内の点の x 座標はすべての実数値をとるので，

これが成り立つ条件は　$p=0$

（ii）$q<0$ のとき

$px+qy \leqq 0 \iff qy \leqq -px \iff y \geqq -\dfrac{p}{q}x$ となるが，$n=-\dfrac{p}{q}$ とおくと，$y \geqq nx$ となる。

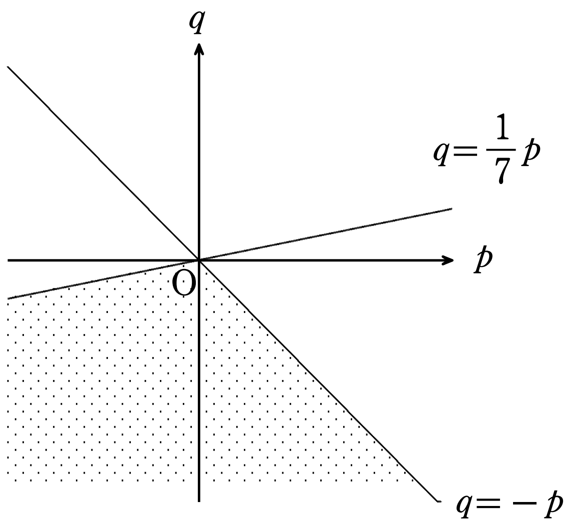
D 内のすべての点が $y \geqq nx$ を満たすような n の値の範囲は $-7 \leqq n \leqq 1$ である。

したがって $-7 \leqq -\dfrac{p}{q} \leqq 1$

$q<0$ に注意して $q \leqq -p$ かつ $q \leqq \dfrac{1}{7}p$

よって，求める領域は図の打点部分である。

ただし，境界も含む。



［ 東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を

$$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ をみたす n の範囲を求めよ。

(3) a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ。

(1) $a_7=\dfrac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!}=\dfrac{\dfrac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{7!}=\dfrac{13\cdot 11\cdot 3\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{13\cdot 11}{7\cdot 6\cdot 5}=\dfrac{143}{210}<1$

(2) $a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{n!}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ であるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\dfrac{(2n)!}{(n!)^3}}{\dfrac{\{2(n-1)\}!}{\{(n-1)!\}^3}}=\frac{(2n)!}{(n!)^3}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!}=\frac{2n(2n-1)}{n^3}=\frac{4n-2}{n^2}$$

よって $\dfrac{4n-2}{n^2}<1 \iff n^2-4n+2>0$ …①

$n^2-4n+2=0$ を解くと $n=2\pm\sqrt{3}$ より①の解は $n<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<n$

いま，$n\geqq 2$ であるから 求める n の範囲は $n\geqq 4$

(3) すべての n に対し，$a_n>0$ であり

(2)より $n\geqq 4$ のとき $a_n<a_{n-1}$ であるから，$n\geqq 3$ において a_n は単調減少する数列である。

よって(1)より，$n\geqq 7$ においては $0<a_n<1$ となり a_n は整数にならない。

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のときを調べればよい。

$a_1=\dfrac{{}_{2}\mathrm{C}_1}{1!}=2$

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 2 \cdot \frac{6}{4} = 3$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{a_3}{a_2} = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{16} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{a_5}{a_4} = \frac{35}{12} \cdot \frac{18}{25} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = a_5 \cdot \frac{a_6}{a_5} = \frac{21}{10} \cdot \frac{22}{36} = \frac{77}{60}$$

であるから，求めるnは　$n=1$，2

[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の２条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１：$f(x)=b$ は相異なる３実数解をもつ。

条件２：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

---

(1) $f(x)=x^3-3a^2x$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

表より，$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための a の条件は　$0<a \leqq 1$

(2) $0<a \leqq 1$ のとき，$f(x)$ は $x \geqq 1$ で単調増加であり，

方程式 $f(x)=b$ の 1 より大きい実数解の個数は，1個または 0 個となる。

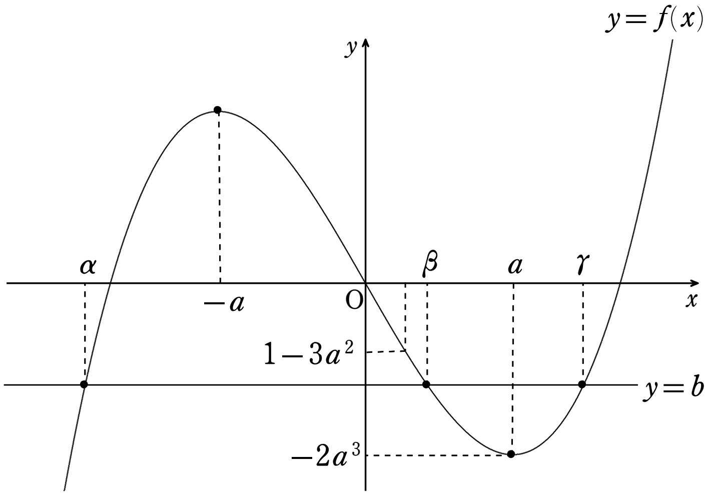
これは条件２に反するので，$a>1$ であることが必要である。

さらに，$f(x)=b$ が相異なる３実数解をもち，

２番目に小さいものが 1 より大きくなるのは

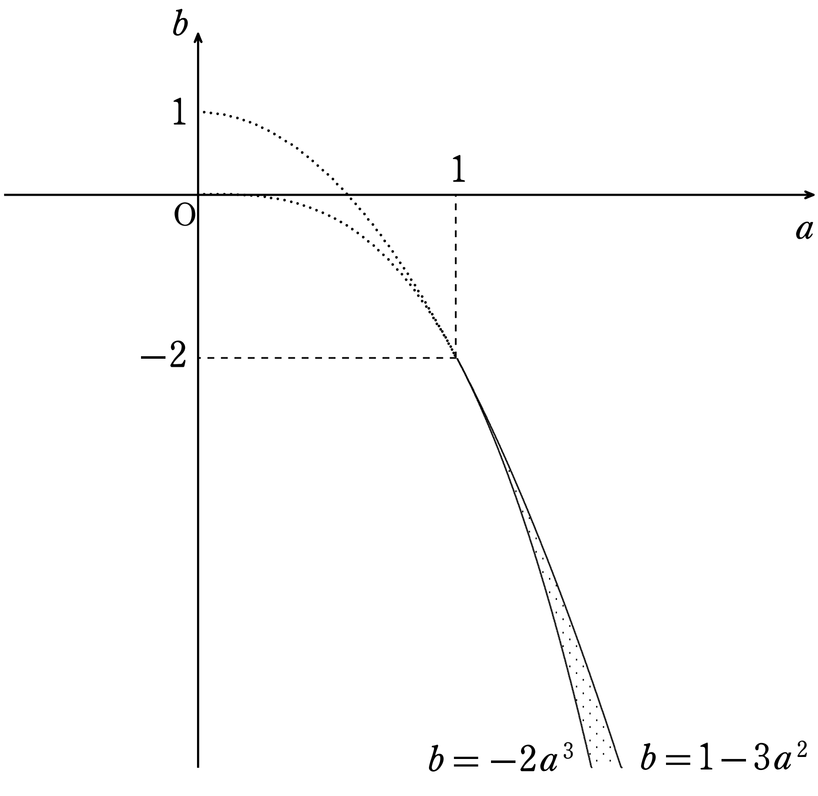
$$f(a)<b<f(1)$$

を満たすときである。



よって，$-2a^3<b<1-3a^2$ となるときであり，

これを図示すると下図の打点部分である。ただし，境界は含まない。



[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{4}$]

放物線 $y=x^2$ のうち，$-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。

座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

(1) $\mathrm{Q}(X,\,Y)$ とおく。

条件より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから，$\mathrm{P}\left(\dfrac{X}{2},\,\dfrac{Y}{2}\right)$

よって，点 P が C 上にあるための条件は

$$\frac{Y}{2}=\left(\frac{X}{2}\right)^2 \quad \left(-1\leqq\frac{X}{2}\leqq 1\right)$$

したがって

$$Y=\frac{1}{2}X^2 \quad (-2\leqq X\leqq 2)$$

以上より，点 Q の軌跡は，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ （$-2\leqq x\leqq 2$）

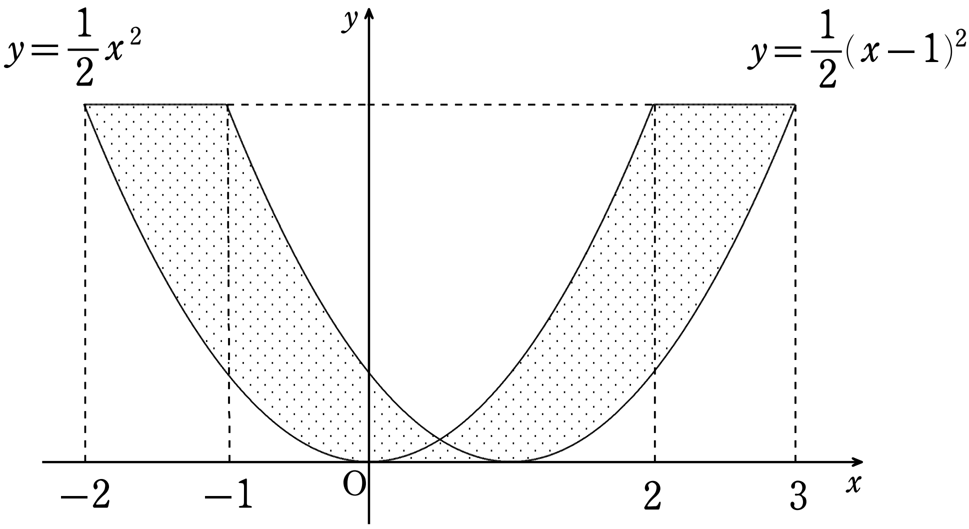
(2) (1)で求めた軌跡を D とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ であり，点 R が線分 OA 上を動くので

点 S は点 Q の軌跡 D を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

その図形を D' とすると，D' は $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ （$-1\leqq x\leqq 3$） となる。

よって，点 S が動く領域を図示すると次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



D と D' の交点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ である。

D の $-2 \leqq x \leqq 0$，$0 \leqq x \leqq 2$ の部分が平行移動したときの通過領域の面積は, 対称性から同じであり,

縦が2，横が1の長方形の面積と等しいので $2 \cdot 1 = 2$

これらが重なっている部分の面積は

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$$

したがって，求める面積は

$$2 \cdot 2 - \frac{1}{24} = \frac{9}{24}$$